UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE MADRID

TEMAS PARA EL EXAMEN DEL CURSO
ANÁLISIS DE FOURIER Y APLICACIONES
TERCER CICLO DE CIENCIAS MATEMÁTICAS
Eugenio Hernández, *Curso 2004-05*
Examen: de junio de 2005 de a

---

1. Enunciar el lema de Riemann-Lebesgue para series de Fourier y demostrarlo. Enunciar los criterios de Dini y de Dirichlet sobre convergencia puntual de series de Fourier.

2. Define el concepto de nucleo de sumabilidad $\{K_t : t \in (a,b)\}$ cuando $t \to a+$. Demuestra que si $\{K_t : t \in (a,b)\}$ es un núcleo de sumabilidad cuando $t \to a+$ y $1 \leq p < \infty$, $K_t \star f$ converge a f en $L^p(\mathbb{R}^n)$ cuando $t \to a+$.

3. Define el operador maximal de Hardy-Littlewood no centrado M en $\mathbb{R}^n$. Admitiendo que M es de tipo débil (1,1), enuncia y demuestra el teorema de diferenciación de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$.

4. Define la transformada de Fourier de funciones de $L^1(\mathbb{R}^n)$. **a)** Enuncia y demuestra el lema de Riemann-Lebesgue para la transformada de Fourier. **b)** Demuestra que la transformada de Fourier de una convolución de dos funciones en $L^1(\mathbb{R}^n)$ es el producto de las transformadas de Fourier de cada una de las funciones.

5. Escribe las ecuaciones del calor y de Laplace en $\mathbb{R}^{n+1}_+$. En cada uno de los casos expresa formalmente su solución usando la transformada de Fourier.

6. Enuncia y demuestra el principio de incertidumbre en el caso sencillo de que las dispersiones se tomen alrededor de cero.

7. Escribe la definición de la transformada de Hilbert usando la definición de valor principal. Enuncia los teoremas de Kolmogorov y de Riesz. Suponiendo cierto el teorema de Kolmogorov, demuestra el teorema de Riesz.

8. Enuncia y demuestra el lema de Calderón-Zygmund en $\mathbb{R}^n$.

9. Escribe la ecuación de ondas y la ecuación de Schrödinger en $\mathbb{R}^{n+1}_+$. En cada uno de los casos expresa formalmente la solución usando la transformada de Fourier.

10. Escribe la definición de espacio de Sobolev $W^{p,s}(\mathbb{R}^n)$ con $s \geq 0$ y $1 < p < \infty$. Enuncia y demuestra el teorema de inmersión de Sobolev (escribe, sin demostrar, los resultados que has usado en la demostración).