UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE MADRID

ANÁLISIS DE FOURIER Y APLICACIONES

TERCER CICLO DE CIENCIAS MATEMÁTICAS

Eugenio Hernández, *Curso 2004-05*

1.1 Sea f continua en $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Demuestra que

$$\lim_{r\to 0+} \frac{1}{|B_r(x_0)|} \int_{B_r(x_0)} f(y)\,dy = f(x_0)\,,$$

donde $B_r(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - x_0\| \leq r\}$.

1.2 Escribe $\big(\operatorname{sen}\frac{\pi x}{L}\big)^3$ como combinación lineal finita de elementos de la forma $\operatorname{sen}\frac{k\pi x}{L}$ para $1 \leq k \leq 3$.

1.3 Con $x = r\cos 2\pi\theta$, $y = \operatorname{sen} 2\pi\theta$, demuestra que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{4\pi^2}\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}\,.$$

1.4 a) Usando la suma de una progresión geométrica demuestra que

$$D_N(x) \equiv \sum_{n=-N}^{N} e^{2\pi n x} = \frac{\operatorname{sen}\pi(2N+1)x}{\operatorname{sen}\pi x}$$

b) Prueba que $\int_0^1 D_N(x)\,dx = 1$.
c) Dibuja, con ordenador, las gráficas de $D_N(x)$ para $N = 1,2,3,4,5$.

1.5 Demuestra que la función $g(x) = \frac{1}{\log\frac{1}{|x|}}$ si $x \neq 0$ y $g(0) = 0$ definida en $[-1/2, 1/2]$ es continua, pero no satisface la condición de Dini.

2.1 a) Usando la fórmula para la suma de una serie geométrica demuestra que

$$P_r(\theta) \equiv \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} r^{|n|} e^{2\pi i n\theta} = \frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos(2\pi\theta)}\,, \qquad 0 \leq r < 1,\ -\frac{1}{2} \leq \theta \leq \frac{1}{2}\,.$$

b) Demuestra que $\int_{-1/2}^{1/2} P_r(\theta)\,d\theta = 1$.
c) Dibuja $P_r(\theta)$ en $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ para $r = \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8}$.

2.2 a) Demuestra que

$$F_N(t) \equiv \frac{1}{N+1}\sum_{k=0}^{N} D_k(t) = \frac{1}{N+1}\Big(\frac{\operatorname{sen}\pi(N+1)t}{\operatorname{sen}\pi t}\Big)^2\,, \qquad N = 0,1,2,....$$

b) Prueba que $\int_{-1/2}^{1/2} F_N(t)\,dt = 1$.
c) Dibuja $F_N(t)$ en $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ para $N = 2,4,6,$.

3.1 a) Demuestra que $P_r(\theta)$ (véase el ejercicio 2.1) es un núcleo de sumabilidad en $\mathbb{T} = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ para $r \to 1-$.

b) Demuestra que $F_N(t)$ (véase el ejercicio 2.2) es un núcleo de sumabilidad en $\mathbb{T} = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ para $N \to \infty$, .

3.2 Usar la definición de $\sigma_N f(t)$ (véase el ejercicio 3.2), la definición de $D_N f(t)$ como combinación lineal de exponenciales, e intercambiar el orden de sumación, para probar

$$\sigma_N f(t) = \sum_{k=-N}^{k=N} (1 - \frac{|k|}{N+1}) \hat{f}(k) e^{2\pi i k t} .$$

3.3 Demuestra la identidad de polarización

$$4 < u, v >= \|u+v\|^2 - \|u-v\|^2 + i\|u+iv\|^2 - i\|u-iv\|^2 ,$$

válida para cualquier producto escalar.

3.4 Usa la identidad de polarización y la igualdad de Plancherel para demostrar la **igualdad de Parseval**: si $\{u_n : n \in \mathbb{N}\}$ es una base ortonormal de un espacio de Hilbert $(H, <,>)$ y $u, v \in H$ se tiene

$$< u, v > = \sum_{n \in \mathbb{N}} \hat{u}(n) \overline{\hat{v}(n)} .$$

4.1 Si $0 < p < \infty$, demuestra que

$$\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = p \int_0^\infty \lambda^{p-1} \sigma_f(\lambda)\, d\lambda ,$$

donde $\sigma_f(\lambda) = |\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| > \lambda\}|$ es la **función de distribución** de f. (NOTA: en la igualdad anterior puede reemplazarse $\mathbb{R}^n$ por cualquier espacio de medida.)

4.2 Sea $0 < p \leq \infty$ y T un operador definido en $L^p(\mathbb{R}^n)$ con valores en el conjunto de funciones medibles de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$ (o en $\mathbb{C}$). Si $0 < q < \infty$, T se dice que es de **tipo débil** (p, q) si existe una constante C tal que

$$|\{x \in \mathbb{R}^n : |Tf(x)| > \lambda\}| \leq \big(\frac{C\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}}{\lambda}\big)^q , \qquad \forall f \in L^p(\mathbb{R}^n) .$$

Demuestra que si T está acotado de $L^p(\mathbb{R}^n)$ en $L^q(\mathbb{R}^n)$ (se dice, en este caso, que T es de **tipo fuerte** (p, q)), entonces T es de tipo débil (p, q).

4.3 Siguiendo la demostración del teorema de diferenciación de Lebesgue hecha en clase, demuestra el resultado siguiente:

Teorema 3, Sección 1.5 (*Convergencia en casi todo punto*). *Sea $0 < p < \infty$ y $\{T_r : r \in I\}$, I intervalo en $\mathbb{R}$, una familia de operadores* **lineales** *definidos en $L^p(\mathbb{R}^n)$ con valores en el conjunto de funciones medibles de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$ (o en $\mathbb{C}$). Se define el* **operador maximal** *asociado a esta familia como*

$$T^* f(x) = \sup_{r \in I} |T_r f(x)| \, .$$

Supongamos que $r_0 \in \overline{I}$ y que

(a) T^* es de tipo débil (p, q) para algún $q \in (0, \infty)$.

(b) Existe un conjunto D denso en $L^p(\mathbb{R}^n)$ para el que si $f \in D$, $\lim_{r \to r_0} T_r f(x) = f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$ (el límite se considera lateral si r_0 es un extremo de I).

Entonces, si $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$,

$$\lim_{r \to r_0} T_r f(x) = f(x) \qquad \textit{para casi todo } x \in \mathbb{R}^n \, .$$

5.1 Describe $Mf(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$, cuando f es la función característica de un intervalo $I = (a, b) \in \mathbb{R}$. (*Sugerencia*: estudiar por separado los casos $x \in (a, b)$, $x \geq b$ y $x \leq a$.)

5.2 Demuestra el teorema de interpolación de Marcinkiewicz para el caso $p_1 < \infty$

Teorema 2, Sección 1.6 (Marcinkiewicz) *Sean $1 \leq p_0 < p_1 \leq \infty$ y T un operador sublineal definido en $L^{p_0} + L^{p_1}$ con valores en el conjunto de funciones medibles de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{C}$. Supongamos que T es tipo débil (p_0, p_0) y tipo débil (p_1, p_1). Entonces, T es tipo fuerte (p, p) para todo p tal que $p_0 < p < p_1$.*

6.1 a) Demuestra que

$$\hat{f}(0) = 1/2 \qquad \text{y} \qquad \hat{f}(k) = \frac{2\,\mathrm{sen}^2\,(\pi k/2)}{k^2 \pi^2} \quad \text{si} \quad k \neq 0,$$

cuando $f(t) = 1 - 2|t|$, $t \in [-1/2, 1/2]$. Utiliza este resultado para probar que

$$i) \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{4} \qquad ii) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6} \qquad iii) \sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

b) Demuestra que

$$\hat{g}(k) = \frac{(-1)^k}{1 + k^2} \frac{\mathit{senh}\, \pi}{\pi}$$

para $g(t) = \mathit{cosh}\,(2\pi t)$, $t \in [-1/2, 1/2]$. Utiliza este resultado para calcular $\sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{(-1)^k}{1+k^2}$.

6.2 Considera las siguientes operaciones sobre funciones definidas en $\mathbb{R}^n$:

Traslación: $(T_y f)(x) = f(x - y)$, $y \in \mathbb{R}^n$

Dilatación: $(D_A f)(x) = f(Ax)$, con $A \in GL(n, \mathbb{R})$ no singular.

Modulación: $(M_z f)(x) = e^{2\pi i x \cdot z} f(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$

Reflexión: $\tilde{f}(x) = f(-x)$

Demuestra:

a) $\widehat{(T_y f)}(\xi) = (M_{-y}\widehat{f}\,)(\xi)$ b) $\widehat{(D_A f)}(\xi) = \dfrac{1}{|det(A)|}(D_{(A^{-1})^t}\widehat{f}\,)(\xi)$

c) $\widehat{(M_z f)}(\xi) = (T_z\widehat{f}\,)(\xi)$ d) $\widehat{\tilde{f}}(\xi) = \widehat{f}(-\xi) = \tilde{\widehat{f}}(\xi)$

7.1 Si

$$G_t(x) = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-|x|^2/4t}, \quad x \in \mathbb{R}^n \quad t > 0$$

demuestra que

$$\widehat{(G_t)}(\xi) = e^{-4\pi^2|\xi|^2 t}.$$

(Sugerencia: usa que $\widehat{g}\,(\xi) = e^{-\pi|\xi|^2}$ cuando $g(x) = e^{-\pi|x|^2}$.)

7.2 a) Construye una función $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ con soporte en $[-1, 1]$ tal que $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi = 1$. (Sugerencia: comienza en dimension 1 con la función $\eta(x) = e^{-1/x}$ para $x > 0$ y $\eta(x) = 0$ para $x < 0$, que es $C^\infty(\mathbb{R})$.)

b) Construye una función $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que $\psi(x) = 1$ en el anillo $1 \leq |x| \leq 2$ y $\psi(x) = 0$ si $|x| \leq \frac{1}{2}$ ó $|x| \geq 4$. (Sugerencia: comienza en dimensión 1 definiendo la función $h(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi$, donde φ es la función construida en **a)** para n=1.)

7.3 Demuestra que $\widehat{\delta_a}$ puede identificarse con la función $\widehat{\delta_a}(x) = e^{-2\pi i x\cdot a}$. (En particular $\widehat{\delta_0} \equiv 1$.)

8.1 Prueba la **desigualdad de Young** para la convolución: sean $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p, q \leq \infty$. Si $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1$ se tiene que $f * g \in L^r(\mathbb{R}^n)$ y

$$\| f * g \|_{L^r(\mathbb{R}^n)} \leq \| f \|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \| g \|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \ .$$

(Sugerencia: aplica el teorema de interpolación de Riesz-Thorin una vez probadas las desigualdades

$$\| f * g \|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq \| f \|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \| g \|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \qquad \text{(Minkowski)}$$

y

$$\| f * g \|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq \| f \|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \| g \|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n)} \qquad \text{(Hölder).}\ )$$

8.2 Sea $G_t(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-x^2/4t}$, $x \in \mathbb{R}$, el núcleo del calor o núcleo de Gauss. Recuerda que $\widehat{(G_t)}(\xi) = e^{-4\pi^2\xi^2 t}$, $\xi \in \mathbb{R}$, (véase el ejercicio **5.3**). Demuestra que

$$D_0(G_t) = \sqrt{t} \qquad \text{y} \qquad D_0(\widehat{G_t}) = \frac{1}{4\pi\sqrt{t}}.$$

(Nota: $D_0(f) = \frac{1}{\|f\|_2}\left(\int_{-\infty}^{\infty} x^2 |f(x)|^2\, dx\right)^{1/2}$ es la dispersión de f alrededor de $x = 0$.)

8.3 Demuestra que

$$\int_0^\infty \frac{e^{-x^2/4t}}{\sqrt{4\pi t}}\, e^{-\lambda t}\, dt = \frac{e^{-|x|\sqrt{\lambda}}}{2\sqrt{\lambda}}\,, \qquad \lambda > 0,\ x \in \mathbb{R}$$

(Sugerencia: Comprueba que la transformada de Fourier de la funciones que aparecen en ambos lados de la igualdad es la misma)

9.1 a) Dibuja $F_R(x) = \frac{1}{R}(\frac{\operatorname{sen}\pi R x}{\pi x})^2$ para $R = 1, R = 2$ y $R = 3$.

b) Para $n = 1$ demuestra que $\lim_{R\to\infty} \sigma_R f = f$ en norma $L^p(\mathbb{R})$, $1 \le p < \infty$ y en norma $L^\infty(\mathbb{R})$ si $f \in C_0(\mathbb{R})$, donde

$$\sigma_R f(x) = \frac{1}{R}\int_0^R S_t f(x)\, dt\,.$$

(Sugerencia: demuestra que $\{F_R : R > 0\}$ es una familia de sumabilidad cuando $R \to \infty$ y usa resultados probados en la sección 1.3. Aqui F_R es el núcleo de Fejer en $\mathbb{R}$.)

c) Para $n = 1$ demuestra que $\lim_{R\to\infty} \sigma_R f = f$ c.t.p., cuando $f \in L^p(\mathbb{R})$, $1 \le p < \infty$ (Sugerencia: probar que

$$sup_{R>0} |\sigma_R f(x)| \le CMf(x)$$

donde M es la función maximal de Hardy-Littlewood. Aplicar los resultados de la sección 1.5.)

9.2 Calcula $Hf(x)$ cuando $x \ne 0$ y $x \ne 1$ para la función $f(x) = \chi_{(0,1)}(x)$ (Hf es la transformada de Hilbert de f). Deduce que la transformada de Hilbert no es un operador acotado de $L^1(\mathbb{R})$ en $L^1(\mathbb{R})$ ni de $L^\infty(\mathbb{R})$ en $L^\infty(\mathbb{R})$

Los problemas siguientes tratan aspectos de los multiplicadores de la tranformada de Fourier en $L^p(\mathbb{R}^n)$. Dada $m \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$, definimos el operador T_m de manera que cuando $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $(T_m\varphi)\widehat{\ }(\xi) = m(\xi)\,\widehat{\varphi}(\xi),\ \xi \in \mathbb{R}^n$. Dado $1 \le p \le \infty$, se dice que m es un multiplicador de $L^p(\mathbb{R}^n)$ para la transformada de Fourier, y se escribe $m \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$, si T_m puede extenderse a un operador acotado de $L^p(\mathbb{R}^n)$ en $L^p(\mathbb{R}^n)$. Se define $||m||_{\mathcal{M}_p(\mathbb{R}^n)} = ||T_m||_{L^p\to L^p}$.

10.1 Demuestra que $||m||_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R}^n)} = ||m||_{L^\infty}$.

10.2 Demuestra que si $1 \le p < q \le 2$ se tiene $\mathcal{M}_1(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{M}_p(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{M}_q(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{R}^n) = L^\infty(\mathbb{R}^n)$. (Indicación: usar el teorema de interpolación de Riesz-Thorin)

10.3 a) Si $m \in \mathcal{M}_p$ demuestra que $\overline{m} \in \mathcal{M}_p$ y $||\overline{m}||_{\mathcal{M}_p} = ||m||_{\mathcal{M}_p}$.

b) Demuestra que si p' es el exponente conjugado de $p > 2$ se tiene $\mathcal{M}_{p'} = \mathcal{M}_p$ y $||\mu||_{\mathcal{M}_p} = ||m||_{\mathcal{M}_{p'}}$.

11.1 Sea K una función localmente integrable en $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Se dice que K satisface la condición de Hörmander si existe $B > 0$ tal que

$$(H) \qquad \int_{|x|\geq 2|y|} |K(x-y) - K(x)|\, dx \leq B, \quad \forall y \in \mathbb{R}^n,\ y \neq 0\,.$$

La función K satisface la condición de Lipschitz si existen constantes $A > 0$ y $\delta > 0$ tal que

$$(L) \qquad |K(x-y) - K(x)| \leq A \frac{|y|^\delta}{|x|^{n+\delta}}, \quad \text{cuando } |x| \geq 2|y|\,.$$

La función K satisface la condición del gradiente si existe $C > 0$ tal que

$$(G) \qquad |\nabla K(x)| \leq C|x|^{-n-1}\,, \quad x \neq 0\,.$$

Demuestra que $(G) \Rightarrow (L) \Rightarrow (H)$.

12.1 Sea

$$m(\xi_1, \xi_2) = \frac{\xi_1 \xi_2^2}{(1 + |\xi|^2)^{k/2}}$$

con $k \geq 3, k \in \mathbb{N}$ y $|\xi|^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2$. Demuestra que $m(\xi_1, \xi_2)$ satisface la condición de Mihlin de los multiplicadores.

12.2 Si se tuviera la estimación $||I_s(f)||_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq C_{p,q,n}||f||_{L^p(\mathbb{R}^n)}$ para toda $f|inL^p(\mathbb{R}^n)$, donde $I_s(f)$ son los potenciales de Riesz

$$I_s(f)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(x-y)}{|y|^{n-s}}\, dy\,,$$

demuestra que necesariamente $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{s}{n}$. (Indicación: aplica la desigualdad a $D_\lambda f$ para todo $\lambda > 0$)
