Hoja 8

1.- El los siguientes casos, dibujar el camino σ y hallar la integral $\int_\sigma f\, ds$.

(a) $f(x,y,z) = x+y+z$ y $\sigma(t) = (\operatorname{sen} t, \cos t, t)$, $0 \le t \le \pi$.

(b) $f(x,y,z) = \dfrac{x+y}{y+z}$ y $\sigma(t) = \Big(t, \dfrac{2}{3}\, t^{\frac{3}{2}}, t\Big)$, $1 \le t \le 2$.

(c) $f : \mathbb{R}^3 \setminus \{y=0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida mediante $f(x,y,z) = \dfrac{1}{y^3}$ y $\sigma(t) = (\log t, t, 2)$, $1 \le t \le e$.

2.- Dibujar las siguientes curvas, y hallar su longitud de arco.

(a) El arco de cicloide descrito por

$$\begin{cases} x = R\,(t - \sin t), \\ y = R\,(1 - \cos t), \end{cases}$$

con $0 \le t \le 2\pi$.

(b) La cardioide que en coordenadas polares viene dada por $r = 1 + \cos\theta$, con $0 \le \theta \le \pi$.

3.- Hallar la integral,

$$\int_\Gamma F(x,y)\, ds$$

del campo vectorial F a lo largo del camino orientado Γ que se indica. Dibujar en cada caso el camino de integración.

(a) $F(x,y) = (x^2+y^2, x^2-y^2)$, a lo largo de la curva $y = 1 - |1-x|$ desde $(0,0)$ hasta $(2,0)$.

(b) $F(x,y) = (x^2 - 2\,x\,y, y^2 - 2\,x\,y)$, siendo Γ el arco de parábola $y = x^2$ que une los puntos $(-2,4)$ y $(1,1)$.

(c) $F(x,y) = (x+y, x-y)$, siendo Γ la elipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ recorrida en el sentido contrario al de las agujas del reloj.

(d) $F(x,y) = (2-y, x)$ a lo largo del camino descrito por la cicloide $\sigma(t) = (t - \operatorname{sen} t, 1 - \cos t)$, $0 \le t \le 2\pi$.

(e) $F(x,y) = \dfrac{1}{|x|+|y|}(1,1)$, donde Γ es el contorno del cuadrado de vértices $(1,0), (0,1), (-1,0)$ y $(0,-1)$ recorrido en el sentido contrario al de las agujas del reloj.

4.- Para cada $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ sea $F(x,y)$ el vector unitario que apunta desde (x,y) hacia el origen de coordenadas. Calcular el trabajo que realiza el campo F para desplazar una partícula desde la posición $(2a,0)$ hasta $(0,0)$ a lo largo de la semicircunferencia superior de $(x-a)^2 + y^2 = a^2$.

5.- Calcular la integral $\int_\Gamma (x^2+y^2)\, dx + (x^2-y^2)\, dy$, cuando Γ es el contorno del triángulo de vértices $(0,0)$, $(1,0)$ y $(0,1)$, orientado positivamente.

6.- Calcular la integral

$$\int_\Gamma y\, dx + x^2\, dy,$$

cuando Γ es la circunferencia $x^2+y^2 = a\,x$, la elipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ y la elipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 2\,\dfrac{x}{a} + 2\,\dfrac{y}{b}$.

7.- Hallar el trabajo que realiza el campo $F(x,y) = (y^2+x^3, x^4)$ al recorrer el contorno del cuadrado $[0,1]\times[0,1]$ en el sentido de las agujas del reloj.

8.- Para cada uno de los siguientes campos vectoriales $F(x,y)$ definidos en $\mathbb{R}^2$, determinar si son gradientes de algún potencial $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$. En caso afirmativo, calcular el potencial f.

(a) $F(x,y)=(3\,x^2y, x^3)$ (b) $F(x,y)=(\operatorname{sen} y - y\,\operatorname{sen} x + x, \cos x + x\,\cos y + y)$

(c) $F(x,y)=(2\,x\,e^y + y, x^2\,e^y + x - 2\,y)$ (d) $F(x,y)=(\operatorname{sen} x\,y + x\,y\,\cos x\,y, x^2\cos x\,y)$.

9.- Verificar el teorema de Green para $D=\big\{(x,y):\ x^2+y^2\le 1\big\}$:

(a) $P(x,y)=x\,y^2$, $Q(x,y)=-y\,x^2$ (b) $P(x,y)=y$, $Q(x,y)=x+y$ (c) $P(x,y)=x\,y$, $Q(x,y)=x\,y$

(d) $P(x,y)=2\,y$, $Q(x,y)=x$ (e) $P(x,y)=x$, $Q(x,y)=y$ (f) $P(x,y)=-y$, $Q(x,y)=x$

10.- Evaluar $\displaystyle\int_\Gamma (2\,x^3-y^3)\,dx+(x^3+y^3)\,dy$ donde Γ es el círculo unidad. Verificar el teorema de Green.

11.- Verificar el teorema de Green para el campo (P,Q) con $P(x,y)=2\,x^3-y^3$ y $Q(x,y)=x^3+y^3$ y la región anular $a^2\le x^2+y^2\le 4\,a^2$.

12.- Calcular el flujo de los campos $F(x,y)=(y,-x)$ y $G(x,y)=(x,y)$ hacia el exterior del disco unidad $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: x^2+y^2\le 1\}$.

13.- Hallar la integral de la componente normal del campo $(2\,x\,y,-y^2)$ a lo largo de la elipse $x^2/a^2+y^2/b^2=1$, orientada positivamente.

14.- Considérese la función $f(x,y)=-\log\sqrt{x^2+y^2}$, definida en $\Omega=\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$, y el campo $F=\nabla f$ en Ω. Hallar el flujo de F hacia el exterior del disco de radio 1 centrado en el punto $(2,1)$. ¿Cuál es el flujo de F hacia el exterior del disco unidad de $\mathbb{R}^2$?

15.- Calcular la integral $\displaystyle\int_\Gamma (x^4-x^3e^x-y)\,dx+(x-y\arctan y)\,dy$, donde Γ viene dado como sigue: dados los puntos $A=(2,0)$, $B=(1,-1)$ y $C=(0,-1)$ de $\mathbb{R}^2$, Γ es el camino formado por el arco AB de la circunferencia de centro $(1,0)$ y radio 1, y los segmentos orientados BC, CO, OA (O es el origen de coordenadas).

16.- Sea $F(x,y)$ el campo vectorial de coordenadas $(P(x,y),Q(x,y))$ dadas por

$$P=\frac{x-y}{x^2+y^2},\qquad Q=\frac{x+y}{x^2+y^2},$$

definido en $\Omega=\mathbb{R}^2\setminus\{0\}$. Hallar la integral $\displaystyle\int_\Gamma F\,ds$ cuando Γ es la circunferencia unidad en $\mathbb{R}^2$, orientada positivamente. ¿Existe una función $f:\Omega\to\mathbb{R}$ tal que $F=\nabla f$ en Ω? ¿Es cierto que $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial y}$ en Ω?

17.- Calcular el área limitada por cada uno de los siguientes contornos.

(a) La elipse $x^2/a^2+y^2/b^2=1$.

(b) El arco de cicloide $x=R\,(\theta-\operatorname{sen}\theta)$, $y=R\,(1-\cos\theta)$, con $0\le\theta\le 2\pi$, y el eje de abscisas.

(c) La rosa de cuatro pétalos descrita en coordenadas polares por $r=3\,\operatorname{sen} 2\theta$.

18.- Sea $f:[0,1]\longrightarrow\mathbb{R}$ una función derivable con derivada f' continua en $[0,1]$, tal que $f(0)=f(1)=0$, $f'(0)=1$, $f'(1)=-1$ y $f(x)>0$ para $0<x<1$. Sea

$$C=\big\{(x,f(x)):\ x\in[0,1]\,\big\}\bigcup\big\{(x,-f(x)):\ x\in[0,1]\big\}.$$

(a) Hallar una parametrización γ de C, con la orientación positiva del plano.

(b) Calcular $\displaystyle\int_\gamma y^2\,dx+xy\,dy$.

(c) Demostrar que $\displaystyle\frac{1}{4}\int_\gamma x\,dy-y\,dx=\int_0^1 f(t)\,dt$.