

## Hoja 7

1.- Hallar el valor de las siguientes integrales, determinando y dibujando en cada caso el recinto de integración.

(a)  $\int_Q (2x + 3y + z) dx dy dz$  con  $Q = [1, 2] \times [-1, 1] \times [0, 1]$ .

(b)  $\int_T x^2 \cos z dx dy dz$  siendo  $T$  la región limitada por los planos  $z = 0, z = \pi, y = 0, y = 1, x = 0, x + y = 1$ .

(c)  $\int_\Omega x y^2 z^3 dx dy dz$  siendo  $\Omega$  el sólido limitado por la superficie  $z = xy$  y los planos  $y = x, x = 1$  y  $z = 0$ .

(d)  $\int_\Omega x y \sqrt{z} dx dy dz$  siendo  $\Omega$  el sólido limitado por la superficie  $y = x^2$  y los planos  $y = z, y = 1$  y  $z = 0$ .

2.- En cada uno de los siguientes casos, la integral  $\int_\Omega f(x, y, z) dx dy dz$  de la función positiva  $f$  se reduce a la integral iterada dada. Dibujar la región de integración  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  y su proyección sobre el plano  $z = 0$ . Escribir entonces la integral como una o varias integrales iteradas en las que integración se hace en el orden  $dz dx dy$ .

(a)  $\int_0^1 \left( \int_0^x \left( \int_0^y f(x, y, z) dz \right) dy \right) dx.$       (b)  $\int_0^1 \left( \int_0^{1-x} \left( \int_0^{x+y} f(x, y, z) dz \right) dy \right) dx.$

(c)  $\int_0^1 \left( \int_0^1 \left( \int_0^{x^2+y^2} f(x, y, z) dz \right) dy \right) dx.$       (d)  $\int_{-1}^1 \left( \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \left( \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^1 f(x, y, z) dz \right) dy \right) dx.$

3.- Utilizar coordenadas esféricas para calcular las siguientes integrales. Dibujar el recinto de integración en cada caso.

(a)  $\int_B \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2 + 9)^2} dx dy dz$ , siendo  $B$  la bola de radio 3 centrada en el origen de coordenadas.

(b)  $\int_C x y z dx dy dz$  con  $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, x, y, z \geq 0\}$ .

(c)  $\int_D (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz$ , siendo  $D$  la corona entre las esferas de radios  $a$  y  $2a$ .

4.- Definir, dibujar en coordenadas cartesianas y hallar el volumen del sólido  $H$  que en coordenadas esféricas viene dado por

$$0 \leq \rho \leq 2a \cos \varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{6}, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

5.- Utilizar coordenadas esféricas para calcular  $\int_\Omega \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dx dy dz$ , donde  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  es el recinto acotado con frontera  $\partial\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = z\}$ .

6.- Determinar y dibujar el recinto de integración y hallar el valor de las siguientes integrales, cambiando a coordenadas cilíndricas.

(a)  $\int_\Omega (x^2 + y^2) dx dy dz$ , siendo  $\Omega$  el sólido limitado por la superficie  $x^2 + y^2 = 2z$  y el plano  $z = 2$ .

(b)  $\int_\Omega dx dy dz$ , siendo  $\Omega$  la región limitada por los planos coordenados,  $z = x^2 + y^2$  y  $x + y = 1$ .

(c)  $\int_\Omega (y^2 + z^2) dx dy dz$  siendo  $\Omega$  un cono recto de revolución, de altura  $h$ , base de radio  $a > 0$  situado en el plano  $z = 0$  y eje en el eje  $Z$ .

(d)  $\int_\Omega ((x + y)^2 - z) dx dy dz$ , siendo  $\Omega$  el cono limitado por  $(z - 1)^2 = x^2 + y^2$  y el plano  $z = 0$ .

7.- Hallar el volumen del sólido de revolución  $z^2 \geq x^2 + y^2$  encerrado por la superficie  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ .

8.- Calcular el volumen de los siguientes sólidos.

(a) El limitado superiormente por la esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = 5$  e inferiormente por el paraboloide  $x^2 + y^2 = 4z$ .

(b) El limitado por el plano  $z = 0$ , el cilindro  $x^2 + y^2 = 2x$  y el cono  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ .

(c) El cuerpo acotado  $K \subset \mathbb{R}^3$  cuya frontera viene dada por  $\sqrt{\frac{x}{2}} + \sqrt{\frac{y}{3}} + \sqrt{\frac{z}{15}} = 1$ .

9.- Hallar el valor de la integral

$$\int_{\Omega} \frac{1}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}} dx dy dz,$$

siendo  $\Omega$  la esfera de radio  $R$  y centro el origen de coordenadas y donde  $(a, b, c)$  un punto exterior a esta esfera.

10.- Demostrar que el área de la elipse  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$  es  $A = \pi a b$ . Utilizar este resultado y el principio de Cavalieri para demostrar que el volumen limitado por el elipsoide  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$  es  $V = \frac{4}{3} \pi abc$ .

11.- Sea  $T$  el toro sólido en  $\mathbb{R}^3$  obtenido al girar el círculo  $(y-a)^2 + z^2 \leq b^2$  del plano  $x = 0$  alrededor del eje  $Z$ . Utilizar el principio de Cavalieri para calcular que el volumen de  $T$  es  $2\pi^2 a b^2$ .