Hoja 6

1.- Sea $f(x,y)$ definida para $(x,y) \in [0,1] \times [0,1]$ mediante $f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \in \mathbb{Q}, \\ 1 & \text{si} \quad x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$

Demostrar que $f(x,y)$ no es integrable en el rectángulo $R = [0,1] \times [0,1]$.

2.- Sea $f(x,y)$ definida en $Q = [0,1] \times [0,1]$ mediante $f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x = y, \\ 0 & \text{si} \quad x \neq y. \end{cases}$

Demostrar la existencia de la integral de f sobre Q y que su valor es 0.

3.- Demostrar la existencia de la integral $\displaystyle\int_Q f(x+y)\, dx\, dy$, donde $Q = [0,2] \times [0,2]$ y $f(t)$ representa el mayor entero $\leq t$. Hallar el valor de la integral.

4.- Hallar el valor de las siguientes integrales sobre los rectángulos indicados. Explicar, en cada caso, la existencia de la integral.

(a) $\displaystyle\int_Q x^2\, e^y\, dx\, dy,\ Q = [-1,1] \times [0, \log 2].$

(b) $\displaystyle\int_Q (x \operatorname{sen} y - y\, e^x)\, dx\, dy,\ Q = [-1,1] \times [0, \pi/2].$

(c) $\displaystyle\int_Q \operatorname{sen}^2(3x - 2y)\, dx\, dy,\ Q = [0,\pi] \times [0,\pi].$

(d) $\displaystyle\int_Q y^{-3}\, e^{tx/y}\, dx\, dy,\ Q = [0,t] \times [1,t], t > 0.$

5.- Para cada una de las siguientes funciones $f(x,y)$ definidas sobre el rectángulo $Q = [0,1] \times [0,1]$, se pide representar el conjunto de los valores de $f(x,y)$ sobre Q y calcular el volumen del sólido así definido. Determinar también el conjunto

$$\mathcal{D} = \big\{(x,y) \in Q : \ f \text{ no es continua en } (x,y)\big\}$$

y explicar la existencia de las integrales utilizadas.

(a) $f(x,y) = \begin{cases} 1 - (x+y) & \text{si} \quad x + y \leq 1, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$

(b) $f(x,y) = \begin{cases} x + y & \text{si} \quad x^2 \leq y \leq 2\,x^2, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$

(c) $f(x,y) = \begin{cases} x^2 + y^2 & \text{si} \quad x^2 + y^2 \leq 1, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$

(d) $f(x,y) = \begin{cases} x + y & \text{si} \quad 0 \leq y \leq \operatorname{sen}(\pi\, x), \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$

6.- Hallar el valor de las siguientes integrales sobre los rectángulos indicados. Explicar en cada caso la existencia de la integral.

(a) $\displaystyle\int_Q \sqrt{|y - x^2|}\, dx\, dy,\ Q = [-1,1] \times [0,2].$

(b) $\displaystyle\int_Q |\cos(x+y)|\, dx\, dy,\ Q = [0,\pi] \times [0,\pi].$

7.- Dibujar la región de integración, estudiar la existencia de la integral y calcular su valor en cada uno de los casos siguientes.

(a) $\displaystyle\int_\Omega x\, \cos(x - y)\, dx\, dy$, siendo Ω el triángulo de vértices $(0,0), (\pi,0), (\pi,\pi)$.

(b) $\displaystyle\int_\Omega e^{x+y}\, dx\, dy$, siendo $\Omega = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| \leq 1\big\}$.

(c) $\displaystyle\int_\Omega x^2\, y^2\, dx\, dy$, siendo Ω la región acotada del primer cuadrante situada entre las hipérbolas $x\,y = 1$, $x\,y = 2$ y las rectas $y = x$, $y = 4\,x$.

8.- Una pirámide está limitada por los tres planos coordenados y el plano $x+2\,y+3\,z=6$. Dibujar esta pirámide y calcular su volumen.

9.- Un sólido está limitado por la superficie $z=x^2-y^2$, el plano $z=0$ y los planos $x=1$ y $x=3$. Dibujar este sólido y calcular su volumen.

10.- En los siguientes apartados, se supone que f es una función integrable en sobre cada una de las regiones Ω. En cada caso, se pide determinar la región Ω e invertir el orden de integración:

$$(a)\ \int_0^2\Big(\int_{y^2}^{2y} f(x,y)\,dx\Big)\,dy. \qquad (b)\ \int_1^4\Big(\int_{\sqrt{x}}^{2} f(x,y)\,dy\Big)\,dx.$$

$$(c)\ \int_1^e\Big(\int_0^{\log x} f(x,y)\,dy\Big)\,dx. \qquad (d)\ \int_0^\pi\Big(\int_{-\operatorname{sen} x/2}^{\operatorname{sen} x} f(x,y)\,dy\Big)\,dx.$$

11.- Hallar el valor de la integral

$$\int_\Omega e^{(y-x)/(y+x)}\,dx\,dy,$$

donde Ω es el triángulo determinado por la recta $x+y=2$ y los dos ejes coordenados. Utilícese un cambio lineal de variables.

12.- En cada uno de los siguientes casos, dibujar la región Ω y expresar la integral $\displaystyle\int_\Omega f(x,y)\,dx\,dy$ como una integral iterada en coordenadas polares.

(a) $\Omega=\big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\le a^2\big\}, a>0.$ $\qquad$ (b) $\Omega=\big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\le 2x\big\}.$

(c) $\Omega=\big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0\le y\le 1-x, 0\le x\le 1\big\}.$ $\qquad$ (d) $\Omega=\big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2\le y\le 1, -1\le x\le 1\big\}.$

13.- Utilizar una transformación lineal para calcular la integral

$$\int_\Omega (x-y)^2\operatorname{sen}^2(x+y)\,dx\,dy,$$

donde Ω es el paralelogramo de vértices $(\pi,0),(2\pi,\pi),(\pi,2\pi),(0,\pi)$.

14.- Consideramos la aplicación definida por $\begin{cases} x=u+v,\\ y=v-u^2.\end{cases}$

(a) Calcular su Jacobiano $J(u,v)$.

(b) Calcular la imagen Ω mediante esta transformación del triángulo T de vértices $(0,0),(2,0),(0,2)$.

(c) Calcular $\displaystyle\int_\Omega \frac{1}{(x-y+1)^2}\,dx\,dy.$

15.- Se considera la aplicación definida por $\begin{cases} x=u^2-v^2,\\ y=2\,u\,v.\end{cases}$

(a) Calcular su Jacobiano $J(u,v)$.

(b) Calcular la imagen Ω mediante esta transformación del rectángulo R de vértices $(1,1),(2,1),(2,3),(1,3)$.

(c) Calcular el área de Ω

16.- Demostrar la igualdad $\displaystyle\int_\Omega f(x\,y)\,dx\,dy=\log 2\int_1^2 f(u)\,du$, siendo Ω la región del primer cuadrante limitada por las curvas $x\,y=1,\ x\,y=2,\ \dfrac{y}{x}=1,\ \dfrac{y}{x}=4.$

17.- Calcular la integral

$$I(p,r)=\int_{C_r}\frac{dx\,dy}{(p^2+x^2+y^2)^p}$$

sobre el círculo $C_r=\big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\le r^2\big\}$. Determinar los valores de p para los que $I(p,r)$ tiene límite cuando $r\to+\infty$.