

Hoja 5

- 1.- Hallar el vector tangente a la curva $\sigma(t) = (t^2, t^3)$ en el punto $(1, -1)$. Escribir la ecuación de la recta tangente correspondiente. ¿Existe el vector tangente en el punto $(0, 0)$?
- 2.- Una partícula se mueve en el espacio \mathbb{R}^3 por la trayectoria $\sigma(t) = (t \cos t, t \sin t, t^2)$, donde $t \in [0, 2\pi]$. Determinar su vector velocidad en el punto $(0, \pi/2, \pi^2/4)$ y la recta tangente en dicho punto.
- 3.- Para las siguientes curvas hallar la velocidad, la rapidez, la aceleración y la ecuación de la recta tangente en el valor de t dado:

$$(a) \sigma_1(t) = (e^{-t} \sin t, e^{-t} \cos t), \quad t = 2\pi. \quad (b) \sigma_2(t) = (2t \sin(2t), 3t \cos(2t), 5t), \quad t = \frac{\pi}{2}.$$

- 4.- Una partícula sigue la trayectoria $\sigma(t) = (t \cos t, t \sin t, \sqrt{2}t^2)$ con $t \geq 0$. Cuando $t = 2\pi$, la partícula se sale por la tangente a $\sigma(t)$ y sigue desplazándose en línea recta con velocidad constante. Escribir la trayectoria que define la posición de la partícula para $0 \leq t \leq 4\pi$. ¿Cuál será su posición y su velocidad en $t = 4\pi$? ¿Cuánta distancia habrá recorrido hasta ese momento?

- 5.- Hallar la longitud de la curva en el intervalo indicado:

$$(a) \sigma(t) = (t, \sqrt{3}t, t^2), \quad 0 \leq t \leq 4.$$

$$(b) \sigma(t) = (2t \sin(2t), 2t \cos(2t), \sqrt{12}t), \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

$$(c) \sigma(t) = (e^{-t} \cos t, e^{-t} \sin t), \quad 0 \leq t < \infty.$$

- 6.- Calcular la longitud de la curva:

$$\sigma(t) = \begin{cases} (\cos t, \sin t, 3t) & \text{si } 0 \leq t \leq \pi, \\ (-1, -t + \pi, 3t) & \text{si } \pi \leq t \leq 2\pi. \end{cases}$$

- 7.- Hallar la ecuación del plano tangente a las superficies parametrizadas:

$$(a) \Phi(u, v) = (4u, 3u^2 + v, v^2 + 5) \text{ en } (0, 1, 6).$$

$$(b) \Phi(u, v) = (u^2, e^{v^2}, v^2 + 1) \text{ en } (0, 1, 1).$$

$$(c) \Phi(u, \theta) = (\cosh u \cos \theta, \cosh u \sin \theta, \sinh u) \text{ en } (0, 1, 0).$$

$$(d) \Phi(u, v) = (u^2 + 1, v^2 + 1, u^2 + v^2) \text{ en } \Phi(1, 1).$$

- 8.- Hallar la expresión de la normal unitaria a las superficies parametrizadas:

$$(a) \Phi(u, v) = (\cos u \sin v, \sin u \sin v, \cos v) \text{ con } 0 \leq u \leq 2\pi, 0 \leq v \leq \pi.$$

$$(b) \Phi(\theta, \varphi) = (4 \cos \theta \sin \varphi, 2 \sin \theta \sin \varphi, 3 \cos \varphi) \text{ con } 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \varphi \leq \pi.$$

$$(c) \Phi(r, \theta) = (\cos \theta, \sin \theta, r) \text{ con } 0 \leq r \leq 5, 0 \leq \theta \leq \pi.$$

- 9.- Dada la esfera de centro $(0, 0, 0)$ y radio 2, hallar la ecuación del plano tangente en el punto $(1, 1, \sqrt{2})$ considerándola como:

$$(a) \text{ Superficie parametrizada, } \Phi(\theta, \varphi) = (2 \cos \theta \sin \varphi, 2 \sin \theta \sin \varphi, 2 \cos \varphi) \text{ con } 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \varphi \leq \pi.$$

$$(b) \text{ Superficie de nivel 4 de la función } f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2.$$

$$(c) \text{ Gráfica de la función } g(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2} \text{ con } (x, y) \in D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 4\}.$$

- 10.- (a) Hallar una parametrización para el hiperboloide $x^2 + y^2 - z^2 = 25$

- (b) Hallar una expresión para una normal unitaria a esta superficie.

(c) Hallar una ecuación para el plano tangente a la superficie en $(x_0, y_0, 0)$, donde $x_0^2 + y_0^2 = 25$.

(d) Demostrar que las rectas $(x_0, y_0, 0) + t(-y_0, x_0, 5)$ y $(x_0, y_0, 0) + t(y_0, -x_0, 5)$ están en la superficie y en el plano tangente hallado en (c).

11.- Esbozar los siguientes campos de vectores

(a) $F(x, y) = (1, 1)$.

(b) $F(x, y) = (x, y)$.

(c) $F(x, y) = (-x, y)$.

(d) $F(x, y) = (-y, x)$.

(e) $F(x, y) = \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{y}{x^2 + y^2} \right)$.

(f) $F(x, y) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right)$.

12.- Mostrar que $\sigma(t) = (t^2 + 1, 2t, 3)$ es una línea de flujo del campo $F(x, y, z) = (y - 2z + 6, 3z - 7, 0)$.

13.- Mostrar que $\sigma(t) = (3 \cos t, 3 \sin t, 9 \cos t \sin t)$ es una línea de flujo del campo $F(x, y, z) = (-y, x, x^2 - y^2)$.

14.- Hallar la divergencia y el rotacional de los campos de vectores:

$$F_1(x, y, z) = (e^{xy}, e^{yz}, e^z), \quad F_2(x, y, z) = (xy^2z^2, x^2yz^2, x^2y^2z), \quad F_3(x, y, z) = \frac{(x, y, z)}{x^2 + y^2 + z^2}.$$

15.- Comprobar que $\nabla \times (\nabla f) = \vec{0}$ para

$$f_1(x, y, z) = x^2 y^2 \cos z, \quad f_2(x, y, z) = e^{xyz}, \quad f_3(x, y, z) = x^2.$$

16.- Dados $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $f \in C^1$, y los campos de vectores en \mathbb{R}^3 , $\vec{F}, \vec{G} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, ambos C^1 , mostrar las siguientes identidades:

(a) $\text{rot}(f\vec{F}) = f \text{rot}\vec{F} + \nabla f \times \vec{F}$.

(b) $\text{div}(f\vec{F}) = f \text{div}\vec{F} + \nabla f \cdot \vec{F}$.

(c) $\text{div}(\vec{F} \times \vec{G}) = \text{rot}\vec{F} \cdot \vec{G} - \vec{F} \cdot \text{rot}\vec{G}$.

17.- Mostrar que $F(x, y, z) = (x^2 + y^2, -2xy, 0)$ no es un campo gradiente.

18.- Dado $F(x, y, z) = (3x^2y, x^3 + y^3, 0)$, mostrar que $\nabla \times F = \vec{0}$. Hallar una función f tal que $F = \nabla f$.

19.- Dado $F(x, y, z) = (2x + 2y, 2x + 2yz^2, 2y^2z)$, mostrar que $\nabla \times F = \vec{0}$. Hallar una función f tal que $F = \nabla f$.