

Hoja 4

1.- Definamos la función

$$f(x, y) = y \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \quad \text{si} \quad (x, y) \neq (0, 0), \quad f(0, 0) = 0.$$

Calcular, cuando existan, las siguientes derivadas parciales:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0), \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0).$$

2.- Sea

$$f(x, y) = xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \quad \text{si} \quad (x, y) \neq (0, 0), \quad f(0, 0) = (0, 0).$$

Comprobar que $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0) = -1$ y $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) = 1$.

3.- El cambio de variable $x = u + v$, $y = u - v$ transforma $f(x, y)$ en $g(u, v)$. Calcular el valor de $\frac{\partial^2 g}{\partial v \partial u}$ en el punto en el que $u = 1$, $v = 1$, sabiendo que

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 1$$

en dicho punto.

4.- Demostrar que para cualquier constante positiva c , la función

$$u(x, t) = \frac{3c}{\cosh^2\left(\frac{\sqrt{c}}{2}(x - ct)\right)}$$

con $x, t \in \mathbb{R}$ satisface la ecuación

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

5.- Hallar el polinomio de Taylor de orden 2 centrado en $(0, 0)$ de las siguientes funciones:

$$(a) \quad f(x, y) = x e^{x+y}. \quad (b) \quad f(x, y) = \sin xy + \cos xy. \quad (c) \quad f(x, y) = e^{x^2+y^2}.$$

6.- Hallar los posibles puntos de máximo, mínimo y de silla de las siguientes funciones:

$$(a) \quad f(x, y) = (x + y)^2. \quad (b) \quad f(x, y) = xy e^{x-y}. \\ (c) \quad f(x, y) = \log(2 + \sin xy). \quad (d) \quad f(x, y) = x \log(x^2 + y^2).$$

7.- Determinar la naturaleza de los puntos críticos de las siguientes funciones:

$$(a) \quad f(x, y) = x^2 - y^3 - x^2 y + y \quad (b) \quad f(x, y) = e^{-x}(x^2 - y^2) \\ (c) \quad f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy \quad (d) \quad f(x, y) = xy + \frac{8}{x} + \frac{8}{y}$$

8.- Hallar los puntos críticos y determinar cuáles son máximos locales, mínimos locales o puntos silla:

$$(a) \quad f(x, y) = x^2 + y^2 - 2xy. \quad (b) \quad f(x, y) = x^2 + y^2 + xy - 2x - 4y + 10. \\ (c) \quad f(x, y) = xy. \quad (d) \quad f(x, y) = 3x^2 - 4y^2 + xy.$$

- 9.- Considérense el polinomio $f(x, y) = (y - 3x^2)(y - x^2)$ y la función $g(t) = f(t, ct)$ de $t \in \mathbb{R}$. Demostrar que $(0, 0)$ es un punto crítico degenerado para f y que aunque g tiene un mínimo en $t = 0$, el punto $(0, 0)$ no es un mínimo local de f .
- 10.- Escribir un número dado $a > 0$ como producto de cuatro factores positivos, cuya suma sea mínima.
- 11.- Calcular la distancia mínima entre los puntos de la gráfica de $f(x, y) = \frac{1}{4xy}$ y el punto $(0, 0, 0)$.
- 12.- Encontrar los valores máximo y mínimo (absolutos) de $f(x, y) = x^3 + 3xy$, en la región
- $$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1, x \leq y\}.$$
- 13.- Hallar los extremos de las siguientes funciones con las correspondientes restricciones:
- (a) $f(x, y) = x^2 + y^2, 2x^2 + y^2 \leq 4.$ (b) $f(x, y) = 4x^2 + y^2 - 2x - y + 3, 4x^2 + y^2 \leq 1.$
- (c) $f(x, y) = x^2 - 3xy + y^2, x^2 + y^2 \leq 2.$
- 14.- Queremos construir una caja de carton con volumen fijo V_0 . Hallar las dimensiones que minimizan la cantidad de cartón utilizada. ¿Que tipo de caja obtenemos?
- 15.- Hallar las dimensiones de una caja de cartón que tenga superficie fija S_0 y que tenga volumen máximo.
- 16.- Se quiere construir una lata metálica con forma cilíndrica con una capacidad de 1 litro. ¿Cuales son las dimensiones que minimizan la cantidad de metal empleada?
- 17.- Se quiere construir una lata metálica con forma cilíndrica, sin la tapa superior y con una capacidad de 1 litro. ¿Cuales son las dimensiones que minimizan la cantidad de metal empleada?
- 18.- Se dispone de 12 decímetros cuadrados de metal para fabricar una lata cilíndrica con las dos tapas. ¿Qué dimensiones maximizan el volumen de dicha lata?