Hoja 3

1.- Hallar la matriz de $Df(a)$ en cada uno de los siguientes casos:

(*a*) $f(x,y) = (y, x, xy, y^2 - x^2)$, $a = (1,2)$.

(*b*) $f(x,y) = (\operatorname{sen}(x+y), \cos(x-y))$, $a = (\pi, -\pi/4)$.

(*c*) $f(x,y,z) = z^2\, e^x \cos y$, $a = (0, \pi/2, -1)$.

(*d*) $f(x) = (e^x \operatorname{sen} x, e^x \cos x, x^2)$, $a = \pi/6$.

(*e*) $f(x,y,z,t) = (\sqrt{y^2+z^2}, \sqrt{x^2+z^2}, x^2+y^2+z^2-9\,t^2)$, $a = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 3\right)$.

2.- Hallar la ecuación de los planos tangentes a la gráficas de la funciones:

(*a*) $f(x,y) = x^2 - y^2$, en el punto $(1,1,0)$.

(*b*) $f(x,y) = x^2 + y^2$ en un punto genérico (x_0, y_0, z_0). ¿En qué puntos es el plano tangente paralelo al plano $x = z$?

3.- Hallar el vector gradiente, en cada punto en el que exista, de las siguientes funciones escalares

(*a*) $f(x,y) = e^x \cos y$.

(*b*) $f(x,y,z) = \log(x^2 + 2\,y^2 - 3\,z^2)$.

(*c*) $f(x,y) = xy \operatorname{sen} \dfrac{1}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ y $f(0,0) = 0$.

4.- Sea $F(x,y) = f(u(x,y), v(x,y))$ con $u = \dfrac{x-y}{2}, v = \dfrac{x+y}{2}$. Aplicar la regla de la cadena para calcular $\nabla F(x,y)$ en función de las derivadas parciales de f, $\dfrac{\partial f}{\partial u}$ y $\dfrac{\partial f}{\partial v}$.

5.- Las relaciones $u = f(x,y)$, $x = x(t)$ e $y = y(t)$ definen u como función escalar de t, digamos $u = u(t)$. Aplicar la regla de la cadena para calcular la derivada de u respecto de t cuando

$$f(x,y) = e^{x\,y} \cos x\,y^2, \qquad x(t) = \cos t, \qquad y(t) = \operatorname{sen} t.$$

6.- La sustitución $t = g(x,y)$ convierte $F(t)$ en $f(x,y) = F(g(x,y))$. Calcular la matriz de $Df(x,y)$ en el caso particular en que $F(t) = e^{\operatorname{sen} t}$ y $g(x,y) = \cos(x^2+y^2)$.

7.- Las ecuaciones $u = f(x,y)$, $x = x(s,t)$ e $y = y(s,t)$ definen u como función de las variables (s,t). Expresar las derivadas parciales $\dfrac{\partial u}{\partial s}$ y $\dfrac{\partial u}{\partial t}$, en términos de las diversas derivadas parciales de f, x e y. Resolver este mismo ejercicio en el caso particular en que $x(s,t) = s\,t, y(s,t) = \dfrac{s}{t}$.

8.- Sean $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ y $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ funciones vectoriales definidas mediante

$$f(x,y) = (e^{x+2y}, \operatorname{sen}(2x+y)), \qquad g(u,v,w) = (u + 2v^2 + 3v^3, 2v - u^2).$$

Hallar cada una de las matrices de $Df(x,y)$ y $Dg(u,v,w)$. Calcular la función compuesta $h(u,v,w) = f(g(u,v,w))$. Calcular la matriz de $Dh(1,-1,1)$.

9.- Sean f una función diferenciable en cada $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ y $g = (g_1, g_2)$ la función vectorial

$$g(u,v,w) = (u^2 + v^2 + w^2, u + v + w).$$

Considérese la función compuesta $h = f \circ g$ y demuéstrese que

$$\|\nabla h\|^2 = 4\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 g_1 + 4\,\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}\, g_2 + 3\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2.$$

10.- Hallar la función derivada $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, siendo $f(x,y)=\displaystyle\int_0^{\sqrt{xy}} e^{-t^2}\,dt$, definida para $x>0, y>0$.

11.- Considérese la función

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy^2}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y)\neq(0,0),\\ 0 & \text{si} \quad (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

(a) ¿Es $f(x,y)$ continua en $(0,0)$?

(b) Hallar las derivadas parciales de f en el punto $(0,0)$.

(c) Sea $g(t)=(t,2t)$, $t\in\mathbb{R}$. Hallar la función compuesta $f\circ g$ y la derivada $(f\circ g)'(0)$. ¿Se puede calcular esta derivada utilizando la regla de la cadena?

12.- Para $y=f(x)$ definida mediante la ecuación $x^2+y^3+e^y=0$. Hallar $f'(x)$ en términos de x e y.

13.- Supongamos que la ecuación $y^2+xz+z^2-e^z-k=0$ define z como función de x e y, sea ésta $z=f(x,y)$. Hallar el valor de la constante k para el cual $f(0,e)=2$ y calcular $\nabla f(0,e)$.

14.- Sean $f,g:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ las funciones escalares dadas por $g(x)=\|x\|^4$ y $f(x)=\langle a,x\rangle$, siendo $a\in\mathbb{R}^n$ un vector fijo (la notación $\langle a,x\rangle$ significa producto escalar de los vectores a y x).

(a) Hallar las derivadas direccionales $D_v f(x)$ y $D_v g(x)$ para cada $x,v\in\mathbb{R}^n$, con $||v||=1$.

(b) Tomando $n=2$, hallar todos las direcciones $(u,v)\in\mathbb{R}^2$ tales que $D_{(u,v)}g(2,3)=6$.

(c) Tomando $n=3$, hallar todos las direcciones $(u,v,w)\in\mathbb{R}^3$ tales que $D_{(u,v,w)}g(1,2,3)=0$.

15.- Hallar los puntos (x,y) y las direcciones $\mathbf{v}=(u,v)$ unitarias en los cuales la derivada direccional $D_{\mathbf{v}}f(x,y)$ de la función $f(x,y)=3\,x^2+y^2$ tiene un máximo, sabiendo que (x,y) está en la circunferencia $x^2+y^2=1$.

16.- Hallar los valores de a,b,c tales que la derivada direccional de

$$f(x,y,z)=a\,x\,y^2+b\,y\,z+c\,x^3z^2$$

en el punto $(1,2,-1)$ tenga un valor máximo de 64 en la dirección paralela al eje Z.

17.- Consideremos el lugar geométrico de los puntos $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ para los cuales $x^2+y^2-z^2=0$. Hallar la ecuación del plano tangente en el punto $(1,1,\sqrt{2})$. ¿Existe un plano tangente en el origen? ¿Por qué?

18.- Si (a,b,c) es un punto de la superficie $z=x\,y$, las dos rectas

$$\begin{cases} z=b\,x,\\ y=b,\end{cases} \qquad \text{y} \qquad \begin{cases} z=a\,y,\\ x=a,\end{cases}$$

se cortan en (a,b,c) y están situadas en la superficie. Comprobar que el plano tangente a esta superficie en el punto (a,b,c) contiene a esas dos rectas.

19.- Hallar la ecuación de la recta tangente a las dos superficies $x^2+y^2+2\,z^2=4$ y $z=e^{x-y}$ en el punto $(1,1,1)$.

20.- Hallar una constante c tal que en todo punto de la intersección de las dos esferas $(x-c)^2+y^2+z^2=3$ y $x^2+(y-1)^2+z^2=1$ los planos tangentes correspondientes sean perpendiculares el uno a otro.

21.- Calcular las derivadas direccionales de la funciones:

(a) $f(x,y,z)=3\,x-5\,y+2\,z$ en el punto $(2,2,1)$ en la dirección de la normal a la esfera $x^2+y^2+z^2=9$.

(b) $f(x,y,z)=x^2-y^2$ en un punto cualquiera de la superficie $x^2+y^2+z^2=4$, en la dirección de la normal exterior en dicho punto.