Hoja 2

1.- Hallar los límites

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2\,x^2 \operatorname{sen} y^2 + y^4 e^{-|x|}}{\sqrt{x^2+y^2}}. \qquad \lim_{(x,y)\to\infty} \frac{\text{máx}\{|x|,|y|\}}{\sqrt{x^4+y^4}}.$$

2.- En cada una de las funciones que siguen, se pide determinar los conjuntos de puntos $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ donde están definidas y donde son continuas.

(a) $f(x,y) = x^4 + y^4 - 4\,x^2y^2$. $\quad (b)$ $f(x,y) = \tan \dfrac{x^2}{y}$. $\quad (c)$ $f(x,y) = \dfrac{1}{\log(x^2+y^2)}$.

(d) $f(x,y) = \arctan \dfrac{y}{x}$. $\quad (e)$ $f(x,y) = \dfrac{\cos x^2}{y}$. $\quad (f)$ $f(x,y) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

3.- Sea

$$f(x,y) = \frac{x-y}{x+y}$$

definida para los $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ tales que $x+y\neq 0$. Demostrar que

$$\lim_{x\to 0}\big(\lim_{y\to 0} f(x,y)\big) = 1 \qquad \text{y} \qquad \lim_{y\to 0}\big(\lim_{x\to 0} f(x,y)\big) = -1.$$

¿Existe el límite de $f(x,y)$ cuando $(x,y)\to(0,0)$?

4.- Sea $f(x,y)$ definida mediante

$$f(x,y) = \frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$$

en los $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ tales que $x^2y^2+(x-y)^2\neq 0$. Demostrar que

$$\lim_{x\to 0}\big(\lim_{y\to 0} f(x,y)\big) = \lim_{y\to 0}\big(\lim_{x\to 0} f(x,y)\big) = 0$$

y que no existe el $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

5.- Demostrar que la función

$$f(x,y) = \begin{cases} y \operatorname{sen} \dfrac{1}{x} + x \operatorname{sen} \dfrac{1}{y} & \text{si } x, y \neq 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

tiene límite cuando (x,y) tiende a $(0,0)$ y que, sin embargo, no existen los límites iterados

$$\lim_{x\to 0}\big(\lim_{y\to 0} f(x,y)\big) \qquad \text{y} \qquad \lim_{y\to 0}\big(\lim_{x\to 0} f(x,y)\big).$$

6.- Para cada $(x,y)\neq(0,0)$ se define

$$f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$$

Hallar el límite de $f(x,y)$ cuando $(x,y)\to(0,0)$ a lo largo de la rectas $y=\lambda x$. ¿Es posible definir $f(0,0)$ de modo que f sea continua en $(0,0)$?

7.- ¿Se pueden hacer continuas las funciones

$$f(x,y) = \frac{\operatorname{sen}(x^2+y^2)}{x^2+y^2} \qquad \text{y} \qquad g(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$$

definiéndolas de forma adecuada en $(0,0)$?

8.- Sea

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad y \le 0 \quad \text{ó} \quad y \ge x^2, \\ 1 & \text{si} \quad 0 < y < x^2. \end{cases}$$

Demostrar que $f(x,y) \longrightarrow 0$ a lo largo de cualquier recta que pase por el origen. Hallar una curva que pase por el origen a lo largo de la cual (salvo en el origen) $f(x,y)$ tiene el valor constante 1. ¿Es f continua en el origen?

9.- Estudiar si son abiertos o cerrados los siguientes conjuntos, utilizando razonamientos con funciones continuas.

$$\begin{aligned} A &= \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 4\,x^2 + 9\,y^2 = 36\big\}, \\ B &= \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \le 1 + \cos^2(x+y)\big\}, \\ C &= \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 4\,x^6 + 2\,y^2 + z^4 < 5\big\}, \\ D &= \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x\,y > 1,\, \exp\big((x^2+y^2) - 5\big) < 1\big\}, \\ E &= \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x - y^2)^4 > 1\big\}. \end{aligned}$$

¿Son acotados o compactos algunos de ellos?

10.- Hallar todas las derivadas parciales de primer orden de las siguientes funciones escalares.

(a) $f(x,y) = x^2 + y^2 \operatorname{sen} xy$.

(b) $f(x,y) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2},}$ definida en los $(x,y) \neq (0,0)$.

(c) $f(x,y) = \arctan \dfrac{x+y}{1-xy}$, definida para los $x\,y \neq 1$.

11.- Considérese la función definida en los $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ mediante

$$f(x,y) = \frac{x\,y^2}{x^2+y^4} \qquad \text{si } x \neq 0, \qquad\qquad f(0,y) = 0.$$

(a) Demostrar que las derivadas parciales $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ y $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ existen y calcular su valor.

(b) ¿Es $f(x,y)$ continua en $(0,0)$?

(c) ¿Es $f(x,y)$ diferenciable en $(0,0)$?

(d) Hallar la derivada direccional $D_{(u,v)}f(0,0)$ para cada dirección $(u,v) \in \mathbb{R}^2$.

12.- Demuéstrese que la función $f(x,y) = \sqrt{|xy|}$ es continua en todo el plano y tiene las derivadas parciales en $(0,0)$, pero no es diferenciable en el origen.

13.- Demuéstrese que la función definida mediante

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2) \operatorname{sen} \dfrac{1}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } x = y = 0, \end{cases}$$

tiene derivadas parciales continuas en todo punto $(x,y) \neq (0,0)$ que no son continuas en el punto $(0,0)$ y que, sin embargo, $f(x,y)$ es diferenciable en $(0,0)$.

14.- Demostrar que la función

$$f(x,y) = \begin{cases} \exp\big(-\dfrac{1}{x^2+y^2}\big) & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

es diferenciable en cualquier punto del plano $\mathbb{R}^2$.