UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE MADRID

ANÁLISIS DE FOURIER Y APLICACIONES

TERCER CICLO DE CIENCIAS MATEMÁTICAS

Eugenio Hernández, *Curso 2003-04*

1.1 Sea f continua en $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Demuestra que

$$\lim_{r\to 0+} \frac{1}{|B_r(x_0)|} \int_{B_r(x_0)} f(y)\, dy = f(x_0)\,,$$

donde $B_r(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - x_0\| \le r\}$.

2.1 a) Prueba que

$$\left(\operatorname{sen}\frac{\pi x}{L}\right)^3 = \frac{1}{4}[3\operatorname{sen}\frac{\pi x}{L} - \operatorname{sen}\frac{3\pi x}{L}]$$

b) Demuestra que $g(x) = \left(\operatorname{sen}\frac{\pi x}{L}\right)^2$ no puede escribirse como una combinación lineal finita de armónicos simples $u_n(x) = \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}$, a pesar de que $f(x)$ es periódica de periodo $2L$.

2.2 Con $x = r\cos 2\pi\theta$, $y = \operatorname{sen} 2\pi\theta$, demuestra que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{4\pi^2}\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}\,.$$

2.3 a) Usando la suma de una progresión geométrica demuestra que

$$D_N(x) \equiv \sum_{n=-N}^{N} e^{2\pi n x} = \frac{\operatorname{sen}\pi(2N+1)x}{\operatorname{sen}\pi x}$$

b) Prueba que $\int_0^1 D_N(x)\, dx = 1$.

c) Dibuja, con ordenador, las gráficas de $D_N(x)$ para $N = 1, 2, 3, 4, 5$.

2.4 Demuestra que

$$\left|\frac{1}{\operatorname{sen}\pi t} - \frac{1}{\pi t}\right| \le \frac{\pi^2}{24} \qquad \text{si} \qquad -\frac{1}{2} \le t \le \frac{1}{2}$$

(*Sugerencia*: Comienza demostrando que $|\, x - \operatorname{sen} x \,| \le \frac{|x|^3}{6}$ si $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$.

3.1 a) Usando la fórmula para la suma de una serie geométrica demuestra que

$$P_r(\theta) \equiv \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} r^{|n|} e^{2\pi i n\theta} = \frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r\cos(2\pi\theta)}\,, \qquad 0 \le r < 1,\ -\frac{1}{2} \le \theta \le \frac{1}{2}\,.$$

b) Demuestra que $\int_{-1/2}^{1/2} P_r(\theta)\, d\theta = 1$.

c) Dibuja $P_r(\theta)$ en $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ para $r = \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8}$.

3.2 a) Demuestra que

$$F_N(t) \equiv \frac{1}{N+1}\sum_{k=0}^{N} D_k(t) = \frac{1}{N+1}\Big(\frac{\operatorname{sen}\pi(N+1)t}{\operatorname{sen}\pi t}\Big)^2, \qquad N = 0, 1, 2, \ldots.$$

b) Prueba que $\int_{-1/2}^{1/2} F_N(t)\,dt = 1$.

c) Dibuja $F_N(t)$ en $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ para $N = 2, 4, 6, .$

3.3 a) Demuestra que $P_r(\theta)$ (véase el ejercicio 3.1) es un núcleo de sumabilidad en $\mathbb{T} = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ para $r \to 1-$.

b) Demuestra que $F_N(t)$ (véase el ejercicio 3.2) es un núcleo de sumabilidad en $\mathbb{T} = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ para $N \to \infty, .$

3.4 Usar la definición de $\sigma_N f(t)$ (véase el ejercicio 3.2), la definición de $D_N f(t)$ como combinación lineal de exponenciales, e intercambiar el orden de sumación, para probar

$$\sigma_N f(t) = \sum_{k=-N}^{k=N} (1 - \frac{|k|}{N+1})\hat{f}(k)e^{2\pi ikt}.$$

3.5 a) Demuestra la identidad de polarización

$$4 < u,\, v >= \|u+v\|^2 - \|u-v\|^2 + i\|u+iv\|^2 - i\|u-iv\|^2,$$

válida para cualquier producto escalar.

b) Usa la identidad de polarización y la igualdad de Plancherel para demostrar la **igualdad de Parseval**: si $\{u_n : n \in \mathbb{N}\}$ es una base ortonormal de un espacio de Hilbert $(H, <,>)$ y $u, v \in H$ se tiene

$$< u,\, v >= \sum_{n\in\mathbb{N}} \hat{u}(n)\overline{\hat{v}(n)}.$$

4.1 Sea $0 < p \leq \infty$ y T un operador definido en $L^p(\mathbb{R}^n)$ con valores en el conjunto de funciones medibles de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$ (o en $\mathbb{C}$). Si $0 < q < \infty$, T se dice que es de **tipo débil** (p, q) si existe una constante C tal que

$$|\{x \in \mathbb{R}^n : |Tf(x)| > \lambda\}| \leq \Big(\frac{C\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}}{\lambda}\Big)^q, \qquad \forall f \in L^p(\mathbb{R}^n).$$

Demuestra que si T está acotado de $L^p(\mathbb{R}^n)$ en $L^q(\mathbb{R}^n)$ (se dice, en este caso, que T es de **tipo fuerte** (p, q)), entonces T es de tipo débil (p, q).

4.2 Si $0 < p < \infty$, demuestra que

$$\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = p\int_0^\infty \lambda^{p-1}\sigma_f(\lambda)\,d\lambda,$$

donde $\sigma_f(\lambda) = |\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| > \lambda\}|$ es la **función de distribución** de f. (NOTA: en la igualdad anterior puede reemplazarse $\mathbb{R}^n$ por cualquier espacio de medida.)

4.3 Siguiendo la demostración del teorema de diferenciación de Lebesgue hecha en clase, demuestra el resultado enunciado como teorema 3 en la sección 1.5.

TEOREMA 3, SECCIÓN 1.5 (*Convergencia en casi todo punto). Sea* $0 < p < \infty$ *y* $\{T_r : r \in I\}$, *I intervalo en* $\mathbb{R}$, *una familia de operadores* **lineales** *definidos en* $L^p(\mathbb{R}^n)$ *con valores en el conjunto de funciones medibles de* $\mathbb{R}^n$ *en* $\mathbb{R}$ *(o en* $\mathbb{C}$*). Se define el* **operador maximal** *asociado a esta familia como*

$$T^* f(x) = \sup_{r \in I} |T_r f(x)| \,.$$

Supongamos que $r_0 \in \overline{I}$ *y que*

(a) T^* *es de tipo débil* (p, q) *para algún* $q \in (0, \infty)$.

(b) Existe un conjunto D *denso en* $L^p(\mathbb{R}^n)$ *para el que si* $f \in D$, $\lim_{r \to r_0} T_r f(x) = f(x)$ *para todo* $x \in \mathbb{R}^n$ *(el límite se considera lateral si* r_0 *es un extremo de* I*).*

Entonces, si $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$,

$$\lim_{r \to r_0} T_r f(x) = f(x) \qquad \textit{para casi todo } x \in \mathbb{R}^n \,.$$

4.4 Describe $Mf(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$, cuando f es la función característica de un intervalo $I = (a, b) \in \mathbb{R}$. (*Sugerencia*: estudiar por separado los casos $x \in (a, b)$, $x \geq b$ y $x \leq a$.)

4.5 Demuestra el teorema de interpolación de Marcinkiewicz, enunciado como teorema 2 en la sección 1.6, para el caso $p_1 < \infty$

TEOREMA 2, SECCIÓN 1.6 (MARCINKIEWICZ) *Sean* $1 \leq p_0 < p_1 \leq \infty$ *y* T *un operador sublineal definido en* $L^{p_0} + L^{p_1}$ *con valores en el conjunto de funciones medibles de* $\mathbb{R}^n$ *en* $\mathbb{C}$. *Supongamos que* T *es tipo débil* (p_0, p_0) *y tipo débil* (p_1, p_1). *Entonces,* T *es tipo fuerte* (p, p) *para todo* p *tal que* $p_0 < p < p_1$.

5.1 a) Demuestra que

$$\hat{f}(0) = 1/2 \qquad \text{y} \qquad \hat{f}(k) = \frac{2 \operatorname{sen}^2(\pi k/2)}{k^2 \pi^2} \quad \text{si} \quad k \neq 0,$$

cuando $f(t) = 1 - 2|t|$, $t \in [-1/2, 1/2]$. Utiliza este resultado para probar que

$$i) \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{4} \qquad ii) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6} \qquad iii) \sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

b) Demuestra que

$$\hat{g}(k) = \frac{(-1)^k}{1 + k^2} \frac{senh\, \pi}{\pi}$$

para $g(t) = cosh\,(2\pi t)$, $t \in [-1/2, 1/2]$. Utiliza este resultado para calcular $\sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{(-1)^k}{1+k^2}$.

5.2 Considera las siguientes operaciones sobre funciones definidas en $\mathbb{R}^n$:

$$\text{Traslación: } (T_y f)(x) = f(x-y),\ y \in \mathbb{R}^n$$
$$\text{Dilatación: } (D_A f)(x) = f(Ax), \text{ con } A \in GL(n,\mathbb{R}) \text{ no singular.}$$
$$\text{Modulación: } (M_z f)(x) = e^{2\pi i x\cdot z} f(x),\ x \in \mathbb{R}^n$$
$$\text{Reflexión: } \tilde{f}(x) = f(-x)$$

Demuestra:

$$a)\ \widehat{(T_y f)}(\xi) = (M_{-y}\widehat{f})(\xi) \qquad b)\ \widehat{(D_A f)}(\xi) = \frac{1}{|det(A)|}(D_{(A^{-1})^t}\widehat{f})(\xi)$$

$$c)\ \widehat{(M_z f)}(\xi) = (T_z\widehat{f})(\xi) \qquad d)\ \widehat{\tilde{f}}(\xi) = \widehat{f}(-\xi) = \tilde{\widehat{f}}(\xi)$$

5.3 Si

$$G_t(x) = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-|x|^2/4t}, \quad x \in \mathbb{R}^n \quad t > 0$$

demuestra que

$$\widehat{(G_t)}(\xi) = e^{-4\pi^2|\xi|^2 t}.$$

(Sugerencia: usa que $\widehat{g}(\xi) = e^{-\pi|\xi|^2}$ cuando $g(x) = e^{-\pi|x|^2}$.)

5.4 a) Construye una función $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ con soporte en $[-1,1]$ tal que $\int_{\mathbb{R}^n}\varphi = 1$. (Sugerencia: comienza en dimension 1 con la función $\eta(x) = e^{-1/x}$ para $x > 0$ y $\eta(x) = 0$ para $x < 0$, que es $C^\infty(\mathbb{R})$.)

b) Construye una función $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que $\psi(x) = 1$ en el anillo $1 \le |x| \le 2$ y $\psi(x) = 0$ si $|x| \le \frac{1}{2}$ ó $|x| \ge 4$. (Sugerencia: comienza en dimensión 1 definiendo la función $h(x) = \int_{-\infty}^x \varphi$, donde φ es la función construida en **a)** para n=1.)

5.5 Sean $f, f_1, f_2, \ldots f_k \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Si $f_k \to f$ in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ cuando $k \to \infty$, demuestra que $f_k \to f$ en $L^p(\mathbb{R}^n)$ cuando $k \to \infty$ y $0 < p \le \infty$.

6.1 Si $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, comprueba que la definición dada de $\widehat{f}$ no depende de la sucesión elegida para aproximar f.

6.2 Prueba la **desigualdad de Young** para la convolución: sean $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$, $1 \le p, q \le \infty$. Si $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1$ se tiene que $f * g \in L^r(\mathbb{R}^n)$ y

$$\| f * g \|_{L^r(\mathbb{R}^n)} \le \| f \|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \| g \|_{L^q(\mathbb{R}^n)}\ .$$

(Sugerencia: aplica el teorema de interpolación de Riesz-Thorin una vez probadas las desigualdades

$$\| f * g \|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \le \| f \|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \| g \|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \qquad \text{(Minkowski)}$$

y

$$\| f * g \|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \le \| f \|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \| g \|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n)} \qquad \text{(Hölder).)}$$

6.3 Sea $G_t(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-x^2/4t}$, $x \in \mathbb{R}$, el núcleo del calor o núcleo de Gauss. Recuerda que $\widehat{(G_t)}(\xi) = e^{4\pi^2\xi^2 t}$, $\xi \in \mathbb{R}$, (véase el ejercicio **5.3**). Demuestra que

$$D_0(G_t) = \sqrt{t} \qquad \text{y} \qquad D_0(\widehat{G_t}) = \frac{1}{4\pi\sqrt{t}}\,.$$

(NOTA: $D_0(f) = \frac{1}{\|f\|_2}\big(\int_{-\infty}^{\infty} x^2|f(x)|^2\,dx\big)^{1/2}$ es la dispersión de f alrededor de $x = 0$.)

7.1 Sea $f \in L^2(\mathbb{R})$ y $0 < \alpha < 1$. Supongamos que existe $C_1 > 0$ tal que

$$\int_{2^k \le |\xi| \le 2^{k+1}} |f(\xi)|^2\,d\xi \le C_1 2^{-2\alpha k}, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Demuestra que existe $C > 0$ tal que $\|f(\cdot + h) - f(h)\|_{L^2(R)} \le C|h|^\alpha$, para todo $h \in \mathbb{R}$. (Sugerencia: imita la demostración del teorema 1 de la sección 2.6.)

7.2 a) Para $n = 1$ demuestra que $\lim_{R\to\infty} \sigma_R f = f$ en norma $L^p(\mathbb{R})$, $1 \le p < \infty$ y en norma $L^\infty(\mathbb{R})$ si $f \in C_0(\mathbb{R})$, donde

$$\sigma_R f(x) = \frac{1}{R}\int_0^R S_t f(x)\,dt\,.$$

(Sugerencia: demuestra que $\{F_R : R > 0\}$ es una familia de sumabilidad cuando $R \to \infty$ y usa resultados probados en la sección 1.3. Aqui F_R es el núcleo de Fejer en $\mathbb{R}$.)

b) Para $n = 1$ demuestra que $\lim_{R\to\infty} \sigma_R f = f$ c.t.p., cuando $f \in L^p(\mathbb{R})$, $1 \le p < \infty$ (Sugerencia: probar que

$$sup_{R>0}\,|\sigma_R f(x)| \le CMf(x)$$

donde M es la función maximal de Hardy-Littlewood. Aplicar los resultados de la sección 1.5.)

7.3 Si $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, demuestra que $\delta_{x_0} * f$ es la función $x \to f(x - x_0)$, $x_0 \in \mathbb{R}$. Es decir $\delta_{x_0} * f = T_{x_0} f$, donde T es el operador de traslación.)