
Hoja 3 de Problemas

1.- Utilizando la formulación en términos de ε y δ demostrar:

$$(a) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{2}, \quad (b) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x}{3+x} = \frac{1}{2}, \quad (c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{|x|} = 0, \quad (d) \lim_{x \rightarrow 0} x \operatorname{sen} \frac{1}{x} = 0.$$

2.- Discutir la existencia de los límites siguientes y calcular su valor si es posible:

$$\begin{array}{lll} (a) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 8}{x^2 - 4} & (b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x} & (c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}(\tan x)}{x} \\ (d) \lim_{x \rightarrow 0} \cos \frac{1}{x^2} & (e) \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} \operatorname{sen} \frac{1}{x} & (f) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\operatorname{sen}(x^2 - 1)}{x - 1} \\ (g) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2(3 + \operatorname{sen} x)}{(x + \operatorname{sen} x)^2} & (h) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \operatorname{sen} x}{x^2 + 5} & (i) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1+x}}{x} \\ (j) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x} - x + 1}{\sqrt{x} + x - 1} & (k) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{2-x} - \sqrt{x+4}}{x^2 + 4x + 3} & (l) \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{3}{x-1} \\ (m) \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x}{x^2 - 4} & (n) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{4} \left[\frac{3}{x} \right] & (o) \lim_{x \rightarrow 1} x \left[\frac{3}{x} \right] \\ (p) \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x-1} \right)^{[x]} & (q) \lim_{x \rightarrow 1} \left(\left| \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + x - 2} \right|^3 + x^6 - 1 \right) & (r) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{|x-1|}{x-1} \end{array}$$

3.- Encontrar las constantes a y b para las cuales se tiene:

$$(a) \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + x + 1} - ax - b) = 1, \quad (b) \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + x + 1} - ax - b) = 1.$$

4.- Demostrar que si $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$, entonces $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) \cos \frac{1}{x} = 0$

5.-

(a) Demostrar que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x+a)$ y que $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x^3)$.

(b) Encontrar una función f , tal que exista $\lim_{x \rightarrow 0} f(x^2)$, y sin embargo no exista $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

6.- Dado $F \subset \mathbb{R}$, demostrar que la función distancia a F definida por

$$f(x) = d(x, F) = \inf\{|x - y| : y \in F\}$$

es continua.

7.- Dar un ejemplo de función definida sobre todos los reales que sólo sea continua en los puntos 0 y 1.

8.- Demostrar que un función definida en \mathbb{R} , verificando

$$f(x + y) = f(x) + f(y), \quad \text{para todo } x, y \in \mathbb{R},$$

y que es continua en 0, es continua en cualquier otro punto.

9.- Si una función continua en \mathbb{R} sólo toma valores racionales. ¿Qué puede decirse de la función?

10.- Estudiar los puntos de discontinuidad y establecer en su caso el tipo de la misma para las siguientes funciones:

$$f_1(x) = \frac{x^3 - 8}{x^2 - 4}, \quad f_2(x) = \frac{b}{x - b}, \quad f_3(x) = x \left[\frac{1}{x} \right], \quad f_4(x) = [\text{sen } x].$$

$$f_5(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \in [a - 1, a), \\ x + a & \text{si } x \in [a, a + 1]. \end{cases} \quad f_6(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in \mathbb{Q}, \\ 1 - x & \text{si } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

$$f_7(x) = \begin{cases} -|\text{sen } x| - 4 & \text{si } x < \pi, \\ |\cos x| - 5 & \text{si } x \geq \pi. \end{cases} \quad f_8(x) = \begin{cases} \arctan x & \text{si } x \leq 0, \\ \text{sen}(\pi x) & \text{si } 0 < x < 1, \\ |x^2 - 5x + 4| & \text{si } x \geq 1. \end{cases}$$

$$f_9(x) = \begin{cases} \frac{1}{2 + 2^{\tan x}} & \text{si } x \in [0, \pi], x \neq \frac{\pi}{2}; \\ \frac{1}{2} & \text{si } x = \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

11.-

- (a) ¿Es cierto que una función de \mathbb{R} en \mathbb{R} que en todo intervalo cerrado tenga un máximo y un mínimo es continua?.
- (b) ¿Es cierto que una función de \mathbb{R} en \mathbb{R} tal que para cada $a < b$, f toma en $[a, b]$ todos los valores comprendidos entre $f(a)$ y $f(b)$ es continua?.

12.- Un punto fijo de f es una solución de la ecuación $f(x) = x$. Sea f una función continua en todos los puntos donde está definida. Decidir razonadamente:

- (a) Si $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$, entonces f tiene un punto fijo.
- (b) Si $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$, entonces f tiene un único punto fijo.
- (c) Si $f : (a, b) \rightarrow (a, b)$, entonces f tiene un punto fijo.

13.- Demostrar que no existe ninguna función continua de \mathbb{R} en \mathbb{R} que tome exactamente dos veces cada valor.

14.- Demostrar que las siguientes ecuaciones tienen solución:

$$(a) \quad x - \text{sen } x - 5 = 0, \quad (b) \quad x^7 + \frac{213}{2 + x^2 + \tan^2 x} = 12.$$