

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE MADRID

CÁLCULO I

CIENCIAS MATEMÁTICAS

Curso 2003-04

4 DE FEBRERO DE 2004

Apellidos.....

Nombre DNI Grupo

1. **a) (1 punto).** Demuestra, aplicando el principio de inducción, que se verifica $2^{2n} > n^2$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

b) (1 punto). Halla los valores de $x \in \mathbb{R}$ para los que

$$\left| \frac{7x + 2}{4x - 3} \right| \leq 2$$

y encuentra el supremo, ínfimo, máximo y mínimo, si existen.

2. **(2 puntos).** Estudia la convergencia de las siguientes series:

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!n^2}{n^n} \quad b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n + 2}{n^9 + 3} \quad c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1) \log(n+1)}$$

3. Prueba que las siguientes afirmaciones son todas **falsas** proporcionando un contraejemplo para cada una de ellas.

a) (0,5 puntos) Toda función continua en el intervalo $(2, 6]$ es acotada.

b) (0,5 puntos) Toda sucesión acotada de números reales es convergente.

c) (0,5 puntos) Si f es una función decreciente en un entorno de x_0 y existe $f'(x_0)$, entonces $f'(x_0) < 0$.

d) (0,5 puntos) Si f es una función continua y derivable en $[0, 1]$ y $f(0) \neq f(1)$, existe $c \in (0, 1)$ tal que $f'(c) = 0$.

4. **a) (1 punto).** Si n es un número natural, halla el polinomio de Taylor de orden $2n$ de la función $f(x) = x^2 \cos(3x)$ en $x = 0$.

b) (1 punto). Calcula

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - x^2 + \frac{9}{2}x^4}{x^6},$$

donde f es la función del apartado anterior.

5.

a) (1 punto) Calcula $\int_0^{\pi} \operatorname{sen}^3 x \, dx$.

b) (1 punto) Calcula $\int x^2 \operatorname{arctg} x \, dx$.

DURACIÓN : 3 HORAS