EJERCICIOS DE ÁLGEBRA, GEOMETRÍA Y ESTADÍSTICA. TEMA 2

1. Los tres vértices de un triángulo en el plano son
$$P_1 = (2,1),\ P_2 = (4,-2),\ P_3 = (5,3).$$
Hallar la longitud de los lados y los ángulos del triángulo. Calcular su área.

2. Determinar los puntos que se encuentran a la misma distancia de los puntos $(0,1)$ y $(2,3)$. Las soluciones forman una recta que se llama mediatriz del segmento.

3. Hallar los vectores unitarios que forman un ángulo de 30^o con el vector $(1, \sqrt{3})$.

4. Dados los siguientes vectores de $\mathbb{R}^4$,
$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix},\ u_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix},\ u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}.$$
Determinar si son linealmente independientes o no y extraer una base del subespacio que generan.

5. ¿Para qué valores de λ, los vectores
$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \lambda \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ 1 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} \lambda \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$
son una base de $\mathbb{R}^3$?

6. *Dados tres vectores cualesquiera de $\mathbb{R}^2$, comprobar que siempre son linealmente dependientes.

7. Dada la recta $2x_1 - 5x_2 = 1$, hallar su vector director. Determinar la recta perpendicular a la dada que pasa por el punto $(3,-1)$.

8. Determinar el plano que pasa por los puntos $(2,1,0)$, $(-1,0,3)$ y $(1,1,2)$. Hallar la recta perpendicular a dicho plano trazada desde el origen de coordenadas.

9. Calcular la distancia del punto $P = (-4,1,-5)$ a la recta que tiene ecuaciones
$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 - 4x_3 = 3 \end{cases}$$

10. Consideremos el cuadrilátero de vértices
$$(9,1),\ (1,2),\ (2,6),\ (8,7).$$
Hallar el centro de masas. Dibujar el cuadrilátero y unir los vértices con el centro de masas. Calcular las áreas de los cuatro triángulos así obtenidos.

11. *Demuestra que todo polinomio de grado 2, $p(x) = x^2 + bx + c$, tiene como máximo dos raices reales de la siguiente forma: considera que tiene tres raices α_1, α_2, α_3 distintas y plantea un sistema con las incógnitas b y c. Prueba que el sistema no tiene solución.

12. Halla la distancia entre las rectas
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$
con el método de minimización de distancias.

13. En cada uno de los puntos $P_1 = (3,0)$, $P_2 = (2,0)$ y $P_3 = (0,0)$ se colocan masas puntuales de 1 gr, 2 gr y 3 gr respectivamente. Halla el centro de masas de esta distribución.