CÁLCULO III

2º Curso de CC. MATEMÁTICAS, 2002/2003

Ejercicios

---

1. Analícese en cada uno de los ejemplos siguientes, la continuidad, la existencia de derivadas parciales, la diferenciabilidad en el punto $(0,0)$ y la continuidad en $(0,0)$ de las derivadas parciales.

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2\,y}{x^4+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0)\,, \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0)\,. \end{cases} \tag{1}$$

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4\,e^{-|x|}}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0)\,, \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0)\,. \end{cases} \tag{2}$$

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{x^2+7\,y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0)\,, \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0)\,. \end{cases} \tag{3}$$

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\ \text{sen}\,\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0)\,, \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0)\,. \end{cases} \tag{4}$$

2. *a)* Calcular la matriz de la diferencial, respecto de las bases canónicas de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$, de la función

$$f(x,y) = \left(\frac{2\,x}{1+x^2+y^2}, \frac{2\,y}{1+x^2+y^2}, \frac{x^2+y^2-1}{1+x^2+y^2}\right).$$

Comprobar que $\|f(x,y)\| = 1$ en todos los $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. ¿Hay algún punto $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ con $a^2+b^2+c^2 = 1$ y que no es imagen por f de ningún (x,y) de $\mathbb{R}^2$?

b) Considérese la función, definida en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$,

$$f(x,y) = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2}\right).$$

¿Es posible asignar un valor a $f(0,0)$ de forma que f sea continua en este punto? Calcular la matriz de la diferencial $Df(x,y)$, respecto de las bases canónicas en $\mathbb{R}^2$, en cada $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Para cada (x,y), localizar en el plano su transformado $f(x,y)$. ¿Es f inyectiva en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$? Hallar la función inversa de f.

c) Calcular la matriz, respecto de las bases canónicas en $\mathbb{R}^3$, de la diferencial de la función definida mediante

$$\begin{cases} y_1 = x_1\ \text{sen}\,\dfrac{x_3}{1+x_1^2+x_2^2+x_3^2} + x_2\ \cos\dfrac{x_3}{1+x_1^2+x_2^2+x_3^2}\,, \\ y_2 = x_1\ \cos\dfrac{x_3}{1+x_1^2+x_2^2+x_3^2} - x_2\ \text{sen}\,\dfrac{x_3}{1+x_1^2+x_2^2+x_3^2}\,, \\ y_3 = x_3\,. \end{cases}$$

Comprobar que $\|y\| = 1$ si y sólo si $\|x\| = 1$.

d) Comprobar que la intensidad del campo gravitatorio

$$\mathbf{E} = G\,M\,\frac{\mathbf{r}}{\|\mathbf{r}\|^3}\,, \qquad \text{con} \quad \mathbf{r} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\} \text{ y } G, M \text{ constantes,}$$

satisface las ecuaciones

$$0 = \frac{\partial E_1}{\partial x_1} + \frac{\partial E_2}{\partial x_2} + \frac{\partial E_3}{\partial x_3}\,,$$
$$0 = \frac{\partial E_2}{\partial x_3} - \frac{\partial E_3}{\partial x_2} = \frac{\partial E_3}{\partial x_1} - \frac{\partial E_1}{\partial x_3} = \frac{\partial E_1}{\partial x_2} - \frac{\partial E_2}{\partial x_1}\,.$$

e) Un punto se desplaza en $\mathbb{R}^3$ siguiendo la trayectoria de ecuación

$$f(t) = ((1+t^2)\,\cosh t, (1+t^2)\,\operatorname{senh} t, \sqrt{(1+t^2)^2 - 1})\,.$$

Calcular el vector velocidad en cada instante t. Observar que la trayectoria seguida está contenida en un hiperboloide. *Notación*: senh y cosh son las funciones seno y coseno de la trigonometría hiperbólica.

3. Sean $g_1, g_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ funciones continuas. Se define $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mediante

$$f(x,y) = \int_0^x g_1(t,0)\,dt + \int_0^y g_2(x,t)\,dt\,.$$

a) Probar que

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = g_2(x,y)\,.$$

b) ¿Cómo habrá que definir f para que en vez de la igualdad anterior se tenga

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = g_1(x,y)\,?$$

c) Hallar una función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = x \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = y\,.$$

d) Hallar una función $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ tal que

$$\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x} = 2\,xy\,, \qquad \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y} = x^2 - 2\,y \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z} = e^z\,.$$

4. Sean $f : A \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ continua y A abierto. Supongamos que existen todas las derivadas direccionales de f en $x_0 \in A$. ¿Se puede asegurar que f sea diferenciable en x_0? *Indicación:* Considérese la siguiente función y estúdiese su comportamiento para $y = x^2$.

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y\sqrt{x^2+y^2}}{x^4+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0)\,, \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0)\,. \end{cases}$$

5. Sea $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^m$ diferenciable y tal que Df es constante. Probar que f es una función afín y que la parte lineal de f es el valor constante de Df.

6. Se dice que una función $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ es homogénea de grado m cuando $f(tx) = t^m f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$ y $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Si f es diferenciable y homogénea de grado $m \neq 0$, probar que

$$\langle \nabla f(x), x \rangle = m\, f(x) \qquad \text{en cada } x \in \mathbb{R}^N .$$

7. Consideremos $F : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ definida por

$$F(x, y) = \langle x, y \rangle ,$$

producto escalar en $\mathbb{R}^N$.

a) Hallar $DF(a, b)$.

b) Si $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^N$ son diferenciables y $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se define por $h(t) = F(f(t), g(t))$, calcular la derivada de h.

c) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^N$ diferenciable. Demostrar que $\|f(t)\|$ es constante si y sólo si los vectores $f(t)$ y $f'(t)$ son ortogonales.

8. Supongamos que la función dos veces diferenciable $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ describe la posición, en cada instante t, de una partícula que se mueve sobre la circunferencia de centro $(0, 0)$ y radio r, con velocidad constante v. Demostrar que los vectores $f(t)$ y $f''(t)$ son ambos ortogonales al vector $f'(t)$. Demostrar que el vector aceleración $f''(t)$ apunta siempre hacia el centro de la circunferencia y que tiene longitud v^2/r.

9. *a)* Calcular las diferenciales de $f_1(x) = ||x||^4$, $f_2(x) = \langle a, x \rangle$, $f_3(x) = \langle x, L(x) \rangle$ y $f_4(x, y) = \langle x, L(y) \rangle$, donde $a \in \mathbb{R}^N$ es fijo, $x, y \in \mathbb{R}^N$ son variables y $L : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ es una aplicación lineal. *Indicación:* Desarrollar $f_2(x + h)$, $f_3(x + h)$ y $f_4(x + h, y + k)$.

b) Sea $B : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ una aplicación bilineal. Calcular la aplicación lineal $DB(x, y)$.

c) Considérese la aplicación $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida

$$f(x, y) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}$$

Hallar la aplicación lineal $Df(x, y)$.

10. Considérese una partícula en $\mathbb{R}^3$, de masa m y con vector de posición $f(t)$. Sean $\mathbf{L}(t) = f(t) \times m f'(t)$ su *momento angular* y $\mathbf{T}(t) = f(t) \times m f''(t)$ el *momento de la fuerza aplicada.*

a) Demostrar que $\mathbf{L}'(t) = \mathbf{T}(t)$ y que, en particular, el momento angular es constante cuando el momento de la fuerza aplicada es nulo. (Ésta es la *ley de conservación del momento angular.*)

b) Cuando la partícula se mueve en un campo central de fuerzas, es decir, $f(t)$ y $f''(t)$ son paralelos, dedúzcase de *a)* que necesariamente permanece en algún plano fijo que pasa por el centro del campo.

11. Se supone $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ función continua. Hallar la diferencial de f en (x, y), $Df(x, y)$, en los casos siguientes

$$a) \quad f(x, y) = \int_a^{x+y} g(s)\, ds , \qquad\qquad b) \quad f(x, y) = \int_a^{xy} g(s)\, ds ,$$

$$c) \quad f(x, y, z) = \int_{xy}^{\operatorname{sen}(x \operatorname{sen}(y \operatorname{sen} z))} g(s)\, ds .$$

12. Supóngase que $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ es diferenciable y que tiene una inversa diferenciable, $f^{-1} : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$. Demostrar que

$$D(f^{-1})(x) = [Df(f^{-1}(x))]^{-1} \quad \text{en cada} \quad x \in \mathbb{R}^N .$$

Indicación: Hallar la diferencial de $f \circ f^{-1}$.

13. Usar la *regla de la cadena* para calcular las derivadas parciales de las siguientes funciones, siendo $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

a) $F(x, y, z) = f(h(x), g(x, y), z)$,

b) $G(x, y, z) = h(f(x, y, z)g(x, y))$,

c) $H(x, y, z) = g(f(x, y, h(x)), g(z, y))$,

d) $I(x, y, z) = (x, F(x, y, z), z)$.

14. Sean $A = (a_{ij})_{1\le i,j\le N}$ una matriz invertible de números reales y $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ una función diferenciable. Hallar el gradiente de la función $G(y)$ definida mediante

$$\begin{cases} G(y) = \|x\|^2 f(x), \\ y = Ax. \end{cases}$$

15. Sean $S \subset \mathbb{R}^N$ abierto y convexo y $f : S \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ de clase C^1 en S. Demostrar que si

$$\sum_{i,j=1}^{N} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)\, \xi_i\, \xi_j > 0 \qquad \text{para todo } x \in S \text{ y todo } \xi \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\},$$

entonces f es inyectiva en S.

16. El determinante Hessiano debe su nombre a O. Hesse quien lo introdujo para estudiar curvas algebraicas. Probar el resultado de Hesse que afirma que si $A = (a_{ij})_{1\le i,j\le N}$ una matriz con determinante 1 y $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ es una función C^2, entonces el determinante Hessiano de $g(x) = f(Ax)$ en el origen coincide con el de f.

17. Calcular los extremos (máximos y mínimos) relativos de

$$f(x, y) = x^4 + y^4 + 2\, x^2\, y^2 - 2\, x^2 + 2\, y^2,$$

indicando su carácter.

18. Considérese la función

$$f(x, y) = x^4 + y^4 + 6\, x^2\, y^2 + 8\, x^3.$$

a) Estudiando el comportamiento de $h(x) = f(x, x)$, probar que f no alcanza ni un máximo ni un mínimo relativo en el origen.

b) Hallar los extremos relativos de f indicando su carácter.

19. Considérese la siguiente fórmula de recurrencia, obtenida aplicando el método de Newton a $f(x) = x^2 - N$ con $N > 0$,

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\big(x_n + \frac{N}{x_n}\big).$$

a) Demostrar a partir del teorema de la aplicación contractiva que la sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a $\sqrt{N}$ para cualquier $x_0 \in [\sqrt{N}, +\infty)$.

b) Extender el apartado anterior a $x_0 \in \mathbb{R}^+$. *Indicación:* Estudiar en qué rango está x_1.

c) Hallar $\sqrt{2}$ con tres cifras decimales exactas usando la fórmula anterior.

20. Estudiar si la función

$$f(x, y) = \big(\frac{1}{3}\operatorname{sen} x - \frac{1}{3}\cos y + 2, \frac{1}{6}\cos x + \frac{1}{2}\operatorname{sen} y - 1\big)$$

tiene algún punto fijo y en caso afirmativo calcularlo con dos cifras decimales.

21. *a)* Probar que si la derivada de $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ existe y no se anula entonces f es inyectiva.

b) Probar que $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $f(x,y) = (e^x \cos y + 2\, e^x \operatorname{sen} y, -e^x \cos y)$ cumple que su jacobiano es siempre positivo y sin embargo f no es inyectiva en $\mathbb{R}^2$.

22. Sea

$$\begin{cases} u(x,y) = x^2 - 4\, y^2 \\ v(x,y) = 4\, x\, y \end{cases}$$

a) Demostrar que la aplicación $(x,y) \mapsto (u,v)$ es localmente invertible en todo punto distinto del origen.

b) Calcular la matriz de la diferencial de la función inversa de $f(x,y) = \big(u(x,y), v(x,y)\big)$ en $x = 1/2$, $y = 1$.

c) Probar que en ningún disco abierto conteniendo al origen existe una inversa de f, ni siquiera no diferenciable. *Indicación:* Estudiar la inyectividad.

23. Si $f \in C^1(\mathbb{R})$ y f' no se anula, demostrar que la función

$$\begin{cases} u(x,y) = f(x) \\ v(x,y) = -\, y + x\, f(x) \end{cases}$$

tiene una inversa global. Si $f(0) = 0$ y $f'(0) = 1$, hallar las derivadas parciales de dicha inversa en el origen.

24. Estudiar si se puede despejar (x,y,z) en términos de (u,v,w) cerca del origen en el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} u = 2\, x + 2\, x^2\, y + 2\, x^2\, z + 2\, x\, y^2 + 2\, x\, y\, z \\ v = x + y + 2\, x\, y + 2\, x^2 \\ w = 4\, x + y + z + 3\, y^2 + 3\, z^2 + 6\, y\, z \end{cases}$$

25. Demostrar que para cada $f \in C^1(\mathbb{R})$ y cada $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ existe un $\varepsilon > 0$ tal que en el disco $B_\varepsilon(x_0, y_0)$ la función $F(x,y) = \big(-\, y + \varepsilon f(x), x + \varepsilon f(y)\big)$ es invertible alrededor de (x_0, y_0) con inversa C^1.

26. Estudiar alrededor de qué puntos tienen inversa diferenciable los cambios a cilíndricas y esféricas

$$\begin{cases} x(r,\varphi,h) = r\cos\varphi \\ y(r,\varphi,h) = r \operatorname{sen}\varphi \\ z(r,\varphi,h) = h \end{cases} \qquad \begin{cases} x(r,\theta,\phi) = r\cos\phi \operatorname{sen}\theta \\ y(r,\theta,\phi) = r \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\theta \\ z(r,\theta,\phi) = r\cos\theta \end{cases}$$

27. Calcular la matriz de la diferencial de la función inversa del cambio a polares $x(r,\theta) = r\cos\theta$, $y(r,\theta) = r \operatorname{sen}\theta$, alrededor del punto $x = 2$, $y = -2\sqrt{3}$.

28. Considérense los abiertos

$$\mathcal{U}_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ 1 < x^2 + y^2 < 4,\ y > -\frac{1}{2}\,|x|\,\},$$
$$\mathcal{U}_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ 1 < x^2 + y^2 < 4,\ y < \frac{1}{2}\,|x|\,\}.$$

Hallar la inversa del cambio a polares (véase el ejercicio anterior) en $\mathcal{U}_1$ y en $\mathcal{U}_2$ y demostrar que sin embargo no hay inversa continua en $\mathcal{U}_1 \cup \mathcal{U}_2$.

29. Encontrar una función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ derivable en todo punto con $f'(0) \neq 0$ que no admita inversa en ningún entorno de $x = 0$. Explicar por qué esto no contradice el teorema de la función inversa. *Indicación:* Considérese alguna variante de la función $y = x^2 \operatorname{sen}(1/x)$.

30. Este ejercicio prueba que ninguna $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de clase C^1 en $\mathbb{R}^2$ puede ser inyectiva, conforme a los siguientes pasos:

a) Probar que si f no es constante podemos encontrar un abierto $\mathcal{U}$ en $\mathbb{R}^2$ tal que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \neq 0 \ \text{ en todo } (x,y) \in \mathcal{U} \qquad \text{o} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \neq 0 \ \text{ en todo } (x,y) \in \mathcal{U}.$$

b) Demostrar que, con la notación anterior, podemos determinar (x,y) en un abierto conteniendo a algún $(x_0,y_0) \in \mathcal{U}$ en una de las expresiones

$$\begin{cases} u = f(x,y) \\ v = y \end{cases} \qquad \text{o} \qquad \begin{cases} u = x \\ v = f(x,y) \end{cases}$$

c) Demostrar que si f fuese inyectiva, las funciones del apartado anterior no podrían tener una inversa local, de donde se deduce una contradicción.

31. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f = (f_1, f_2) \in C^1(\mathbb{R}^2)$, satisfaciendo las *ecuaciones de Cauchy-Riemann*

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = \frac{\partial f_2}{\partial y}\,, \qquad \frac{\partial f_1}{\partial y} = -\,\frac{\partial f_2}{\partial x}\,.$$

a) Demostrar que existe f^{-1} diferenciable en algún abierto conteniendo a (x_0,y_0) si y sólo si $Df(x_0,y_0)$ no es la aplicación lineal idénticamente nula.

b) Demostrar que si existe la inversa local del apartado anterior, entonces también satisface las ecuaciones de Cauchy-Riemann.

c) Suponiendo $f(0,0) \neq (0,0)$, probar que g dada por

$$g(x,y) = \big(f_1(x,y)^2 - f_2(x,y)^2, 2\, f_1(x,y)\, f_2(x,y)\big)$$

satisface las ecuaciones de Cauchy-Riemann y que $Df(0) = \mathbf{0}$ si y sólo si $Dg(0) = \mathbf{0}$.

d) Encontrar tres funciones no constantes que satisfagan las ecuaciones de Cauchy-Riemann.

32. Demostrar que existe una única función $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de clase C^1 en un abierto U conteniendo a $(0,0)$, con $f(0,0) = 0$ y verificando

$$e^{f(x,y)} = \big(1 + x\, e^{f(x,y)}\big)\,\big(1 + y\, e^{f(x,y)}\big) \qquad \text{en todos los } (x,y) \in U\,.$$

33. Probar que la ecuación

$$\operatorname{sen} yz + \operatorname{sen} xz + \operatorname{sen} xy = 0$$

admite una única solución $z = f(x,y)$ de clase C^1 en un entorno del punto $(\pi,0)$ que cumple $f(\pi,0) = 1$. Calcular el polinomio de Taylor de orden uno en dicho punto.

34. Demostrar que la ecuación

$$z^3 \log xy + 2\,x^2 + 2\,y^2 + z^2 + 8\,x\,z - z + 8 = 0$$

define exactamente dos funciones diferenciables $z = f_1(x,y)$ y $z = f_2(x,y)$ en un entorno de $(1,1)$. Hallar sus desarrollos de Taylor de orden uno en $(1,1)$.

35. Deducir el teorema de la función inversa del teorema de la función implícita.

36. Estudiar si es posible despejar $u(x,y,z)$ y $v(x,y,z)$ en las ecuaciones

$$\begin{cases} x\,y^2 + x\,z\,u + y\,v^2 = 3 \\ x\,y\,u^3 + 2\,x\,v - u^2\,v^2 = 2 \end{cases}$$

en un entorno de $(x,y,z) = (1,1,1)$ y $(u,v) = (1,1)$. Calcular $\partial u/\partial x$, $\partial v/\partial x$ y $\partial v/\partial z$.

37. Estudiar alrededor de qué puntos existe una función diferenciable $y = y(x)$ tal que

$$x^3 - 5\,x - y^2 - 2\,x\,y = -12.$$

Suponiendo $y > 0$, hallar $y'(1)$.

38. Dado el sistema

$$\begin{cases} x^2 - y\cos uv + z^2 = 1 \\ x^2 + y^2 - \operatorname{sen} uv + 2\,z^2 = 4 \\ xy - \operatorname{sen} u \cos v + z = 1 \end{cases}$$

Demostrar que alrededor de $(x,y,z) = (1,1,1)$, $(u,v) = (\pi/2, 0)$ se puede definir x, y y z en función de u y v. Calcular la matriz de $Df(\pi/2,0)$ donde $f(u,v) = \big(x(u,v), y(u,v), z(u,v)\big)$.

39. *Ecuaciones diferenciales ordinarias en variables separables.* Sean $f : I \to \mathbb{R}$ y $g : J \to \mathbb{R}$ dos funciones continuas definidas en dos intervalos abiertos, I, J, y supongamos que $g(y) \neq 0$ en todo $y \in J$. Sea $(x_0, y_0) \in I \times J$.

a) Demostrar que la ecuación

$$\int_{x_0}^{x} f(s)\,ds = \int_{y_0}^{y} g(s)\,ds$$

define una función $y = y(x)$ que es solución del problema de valor inicial

$$\begin{cases} y'(x) = \dfrac{f(x)}{g(y)} \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

en algún intervalo que contiene a x_0.

b) Demostrar que, de hecho, $y(x)$ está definida en todo $x \in I$.

40. Sea $f = (f_1, f_2) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$, tal que alrededor de cierto punto (x,y) se cumple $\partial f_2/\partial y \neq 0$.

a) Demostrar que localmente existe $y(x)$ tal que $f_2(x, y(x)) = 0$.

b) Demostrar que definiendo $z(x) = f_1(x, y(x))$ se tiene

$$z'(x) = \frac{J}{\partial f_2/\partial y}$$

donde J es el jacobiano de F.

41. Demostrar que aunque no se cumplen las condiciones del teorema de la función implícita es posible despejar, con funciones C^1, la x y la y en términos de z alrededor de $(x_0, y_0) = (0, -1)$ y $z_0 = 1$, en el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x^2 + z^2 + 2\,x\,z - 2\,x - 2\,z + 1 = 0, \\ x^2 + 4\,y^2 + 4\,z^2 + 4\,x\,y + 4\,x\,z + 8\,y\,z = 0. \end{cases}$$

Indicación: Escribir estas fórmulas como cuadrados perfectos.

42. Demostrar que no es posible despejar, con funciones C^1, la x y la y en términos de z alrededor de $(x_0, y_0) = (0,0)$ y $z_0 = 0$, en el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x^3 + z^3 y^2 + z = 0 \\ \cos xyz + \operatorname{sen} z = 1 \end{cases}$$

Indicación: Tratar de hallar la derivada de esas hipotéticas funciones de z.

43. *a)* Determinar los valores de a para los que el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x\,z^3 + y\,u + a\,x = 1 \\ 2\,x\,y^3 + z\,u^2 + a\,(y-1) = 0 \end{cases}$$

define a (x, y) como función implícita diferenciable de (z, u) en un entorno de los puntos $(x_0, y_0) = (0,1)$ y $(z_0, u_0) = (0,1)$.

b) Si designamos dicha función mediante $(x, y) = G(z, u)$, calcular los valores de a para los cuales G admite una inversa local de clase C^1 en un entorno de $(0,1)$.

c) Demostrar que para los valores de a no obtenidos en el primer apartado no puede existir tal G. *Indicación:* Derivar implícitamente con respecto de u.

44. Supongamos que se dan las condiciones del teorema de la función implícita para despejar y en función de x en $g(x, y) = 0$ con $g \in C^2(\mathbb{R}^2)$. Hallar una fórmula para $y''(x)$ que sólo involucre derivadas parciales.

45. Probar que la ecuación

$$x\,y = \log \frac{x}{y}$$

admite una única solución $y = f(x)$ diferenciable en un intervalo que contiene a $\sqrt{e}$ y verificando $f(\sqrt{e}) = 1/\sqrt{e}$. Deducir que la función f tiene un máximo local en el punto $\sqrt{e}$.

46. Demostrar que el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} \operatorname{sen} \dfrac{\pi}{w} = 0 \\ e^{x+u} = 1 \\ 2\,x - u + v - w + 1 = 0 \end{cases}$$

define implícitamente tres funciones $u = u(x)$, $v = v(x)$ y $w = w(x)$ en un entorno de $x_0 = 0$ y del punto $(u_0, v_0, w_0) = (0,0,1)$. Obtener el desarrollo de Taylor de $v(x)$ en 0 hasta el término de segundo orden.

47. Si $M, N \subset \mathbb{R}^{n+k}$ son subvariedades n dimensionales arbitrarias, ¿es siempre $M \cup N$ una subvariedad? ¿Y $M \cap N$?

48. Estudiar si el conjunto

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x\,y = 0\,,\ x^2 + y^2 + z^2 = 1\,,\ z \neq 0, \pm 1\}$$

es una subvariedad unidimensional de $\mathbb{R}^3$. Representar gráficamente M.

49. Demostrar que $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 = y^2\}$ no es una subvariedad unidimensional de $\mathbb{R}^2$.

50. Representar gráficamente el conjunto

$$C = \{\big(\cos t, \operatorname{sen} t, t^2\,(2\pi - t)^2\big) \in \mathbb{R}^3 \,:\, 0 \leq t \leq 2\pi\}$$

y probar que es una curva regular en $\mathbb{R}^3$. Hallar los espacios tangente y normal a C en el punto $(1,0,0)$.

51. Considérense las curvas regulares C_1 y C_2 en $\mathbb{R}^3$ determinadas, respectivamente, por

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1 \\ x+y+z=0 \end{cases} \quad \text{y} \quad \begin{cases} x^2+y^2=z^2 \\ x+y+z=1 \end{cases}$$

a) Representar gráficamente ambas curvas.

b) Probar que, efectivamente, son curvas regulares.

c) Hallar la recta tangente a C_1 en el punto $(1/\sqrt{14}, 2/\sqrt{14}, -3/\sqrt{14})$. Hallar la ecuación del plano normal a C_2 en el punto $((3+\sqrt{5})/2, (3+\sqrt{5})/4, -(5+3\sqrt{5})/4)$.

d) Calcular parametrizaciones locales de C_1 y de C_2. *Indicación:* Utilizar coordenadas esféricas en C_1 y cilíndricas en C_2.

52. Una partícula se mueve en $\mathbb{R}^2$ a lo largo de la curva

$$2\,x^2+2\,x\,y+3\,y^2+3\,x+4\,y=14$$

de forma que la suma de las componentes de la velocidad en cada punto es 1. Calcular su velocidad y aceleración en $p=(1,1)$. Hallar también la aceleración tangencial y normal en p, esto es, las proyecciones del vector aceleración sobre las rectas tangente y normal.

53. *a)* Hallar el "plano" tangente a la gráfica $\mathcal{G}$ de la función

$$f(x,y,z)=e^y\,\cos z+e^z\,\cos x+e^x\,\cos y$$

en el punto de $\mathcal{G}$ correspondiente a $x=y=z=0$.

b) Estudiar si

$$M=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : f(x,y,z)=3\}$$

define, localmente en $\mathbf{p}=(0,0,0)$, una superficie regular en $\mathbb{R}^3$. Hallar el plano tangente a M en $\mathbf{p}$. Explicar la relación que guarda éste con el calculado en el apartado anterior.

54. Sea una parametrización $\mathbf{X}$ de una superficie $S\subset\mathbb{R}^3$ con $\mathbf{X}(0,0)=(x_0,y_0,z_0)$ y sea $(a_{ij})_{i=1,2,3,j=1,2}$ la matriz de $D\mathbf{X}(0,0)$. Demostrar que la recta normal a S en (x_0,y_0,z_0) viene dada por

$$\frac{x-x_0}{\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}}=\frac{y-y_0}{\begin{vmatrix} a_{31} & a_{11} \\ a_{32} & a_{12} \end{vmatrix}}=\frac{z-z_0}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}}.$$

55. Sea

$$\mathbb{T}^2=\{(x_1,x_2,x_3,x_4)\in\mathbb{R}^4 : x_1^2+x_2^2=1\,,\ x_3^2+x_4^2=1\}$$

Estudiar si M es una subvariedad bidimensional de $\mathbb{R}^4$. Hallar una parametrización de M en un entorno de $(1,0,0,-1)$. Hallar el espacio tangente a M en $(0,1,1,0)$ exhibiendo una de sus bases.

56. Sea $\Gamma\subset\mathbb{R}^4$ la curva definida por

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2+t^2=7 \\ x^2-3\,z^2+t^2=2 \\ 4\,x^2-y^2-z^2-2\,t^2=-6 \end{cases}$$

Hallar los puntos de Γ en los que $(2,-16,4,5)$ es vector tangente.

57. Considérese la superficie esférica $\mathbb{S}^2$ descrita mediante la parametrización local

$$\mathbf{X}(u,v) = \Big(\frac{2\,u}{1+u^2+v^2}, \frac{2\,v}{1+u^2+v^2}, \frac{u^2+v^2-1}{1+u^2+v^2}\Big)$$

dada por la proyección estereográfica (que proyecta cada punto de $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$ en $\mathbb{S}^2$ por medio de la recta que lo une con el polo norte $N = (0,0,1)$). Sea Γ la curva en $\mathbb{S}^2$ obtenida mediante

$$\gamma(u) = \mathbf{X}(u,v) \qquad \text{cuando} \quad 3\,v = u-2\,,\ u \in \mathbb{R}.$$

a) Representar gráficamente Γ en $\mathbb{S}^2$. *Indicación:* Intentar visualizar la proyección estereográfica.

b) Hallar la ecuación de la recta tangente a Γ en el punto $\big(\frac{10}{27}, \frac{2}{27}, \frac{25}{27}\big)$.

58. Considérese la superficie regular $\mathcal{C}$ en $\mathbb{R}^3$ definida por la función

$$\mathbf{X}(u,v) = \big(\cosh v\ \cos u, \cosh v\ \operatorname{sen} u, v\big)$$

y en $\mathcal{C}$ la curva regular Γ obtenida mediante la parametrización

$$\gamma(t) = \mathbf{X}(u,v)\,, \qquad \text{donde} \quad -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}\,,\ u = \tan t\,,\ v = u\,e^u\,.$$

Representar gráficamente $\mathcal{C}$ y Γ. Hallar la recta tangente a Γ en el punto correspondiente a $t = 0$.

59. *a)* Demostrar que

$$\mathbb{H} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 = 1+z^2\}$$

es una superficie regular en $\mathbb{R}^3$. Representar gráficamente $\mathbb{H}$.

b) Demostrar que la función

$$\mathbf{X}(u,v) = \big(v\ \cos u, v\ \operatorname{sen} u, u\big)\,, \qquad \text{donde} \quad u \in \mathbb{R}\,,\ v > 0\,,$$

permite definir parametrizaciones locales de una superficie regular $\mathcal{H}$ en $\mathbb{R}^3$. Representar gráficamente $\mathcal{H}$.

c) Considérese la curva Γ obtenida al intersecar $\mathbb{H}$ con $\mathcal{H}$. Demostrar que, efectivamente, Γ es una curva regular en $\mathbb{R}^3$. Calcular la ecuación de la recta tangente a Γ en cada uno de sus puntos.

60. Sea el arco de astroide

$$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^{2/3}+y^{2/3} = 1,\ x > 0,\ y > 0\}.$$

Probar que la intersección con los ejes de cada tangente a C da lugar a dos puntos situados a distancia unidad.

61. Sea C una curva regular.

a) Probar que siempre existen parametrizaciones locales, σ, por *longitud de arco*, esto es, tales que $\|\sigma'\| = 1$. *Indicación*: Si σ está definida en un entorno de cero y no satisface $\|\sigma'\| = 1$, considérese $\sigma \circ f^{-1}$ con

$$f(u) = \int_0^u \|\sigma'\|\,.$$

b) Demostrar que si σ es una parametrización local de C por longitud de arco con $\sigma(0) = \mathbf{p}$ entonces $\sigma''(0)$ es un vector normal a C en $\mathbf{p}$.

62. Sea $C \subset S$ con C y S, respectivamente una curva regular y una superficie regular de $\mathbb{R}^3$. Se dice que C es una *geodésica* de S si para cada parametrización local σ de C por longitud de arco (con $\|\sigma'\| = 1$) se cumple que $\sigma''(t)$ es normal a S en $\sigma(t)$.

a) Demostrar que en $\mathbb{S}^2$ todo meridiano es geodésica y ningún paralelo distinto del ecuador lo es.

b) Tratar de explicar (al menos en el ejemplo anterior) por qué en mecánica se considera que las geodésicas son las trayectorias descritas por las partículas ligadas a S sobre las que no actúan fuerzas externas.

63. *a)* Hallar los valores extremos de $z = \cos^2 x + \cos^2 y$ con la condición $x - y = \pi/4$.

b) Hallar los valores extremos de $f(x, y, z) = x - 2\,y + 2\,z$ en la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

64. *a)* Hallar las distancias máxima y mínima desde el origen de coordenadas a la curva en $\mathbb{R}^2$

$$5\,x^2 + 6\,x\,y + 5\,y^2 = 8\,.$$

b) Hallar los puntos de la curva determinada por

$$\begin{cases} x^2 + x\,y + y^2 - z^2 = 1 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

que están más próximos al origen.

65. Hallar el valor máximo de $\log x + \log y + 3\,\log z$ en la porción de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 5\,r^2$ en la que $x > 0, y > 0$ y $z > 0$. Aplicar el resultado para demostrar que para cualesquiera números reales positivos a, b y c se cumple

$$a\,b\,c^3 \leq 27\left(\frac{a+b+c}{5}\right)^5.$$

66. *a)* Calcular los extremos absolutos de la función $f(x, y) = 2\,x + y^2$ sobre el conjunto

$$K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 2, y^2 \geq x\}\,.$$

b) Determinar los extremos absolutos de la función $f(x, y, z) = 2\,x^2 + y^2 + z^2 - x\,y$ sobre el conjunto

$$K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{8} \leq 1\}\,.$$

67. Calcular el paralelepípedo de mayor volumen inscrito en el elipsoide

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1\}\,,$$

siendo $a, b, c > 0$.

68. Sean a y b dos números reales positivos tales que $a\,b\,(a + b) = 1$. Calcular el volumen máximo de los sólidos que tienen como base el triángulo de vértices $(0, 0)$, $(a, 0)$ y $(0, b)$ y cuyas secciones al cortar por planos perpendiculares al plano XY y paralelos al plano YZ son triángulos isósceles de altura 4.

69. Para fabricar determinadas placas metálicas se utiliza aluminio, hierro y magnesio. La cantidad de placas producidas a partir de x kg de aluminio, y kg de hierro y z kg de magnesio es $Q(x, y, z) = x\,y\,z$. Si el coste del aluminio es 600 pts/kg, el del hierro es 400 pts/kg y el del magnesio es 800 pts/kg, ¿qué cantidad de cada metal debe emplearse para producir 1000 placas al menor coste posible?

70. ¿Cuáles deben ser las dimensiones de un envase metálico cilíndrico (con ambas tapas) de un litro de capacidad y cuya construcción requiera la menor cantidad de metal?

71. Sea $T : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ una aplicación lineal autoadjunta y sea $f(x) = \langle Tx, x\rangle$ en los $x \in \mathbb{R}^N$.

a) Considérese

$$\max\{f(x) : x \in \mathbb{S}^{N-1}\}$$

para demostrar que existen $\lambda \in \mathbb{R}$ y $x \in \mathbb{S}^{N-1}$ tales que $Tx = \lambda\, x$.

b) Sea $V = \{y \in \mathbb{R}^N : \langle x, y\rangle = 0\}$. Demostrar que $T(V) \subset V$.

c) Demostrar que $\mathbb{R}^N$ tiene una base ortonormal formada por vectores propios de T, es decir, que T es diagonalizable.

72. Utilizar los multiplicadores de Lagrange para hallar una fórmula para la distancia de un punto (a, b, c) a un plano $Ax + By + Cz + D = 0$.

73. Dos números de $\mathbb{R}^+$ suman 6, ¿cuál es el máximo valor que puede tomar su producto?

74. Demostrar la desigualdad aritmético-geométrica

$$\sqrt[n]{a_1\, a_2 \cdots a_n} \le \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \qquad \text{para } a_i \ge 0.$$

Indicación: Escríbase $a_i = x_i^2$ y considérese sólo lo que ocurre en la esfera unidad n-dimensional.

75. Demostrar la desigualdad de Cauchy-Schwarz en $\mathbb{R}^n$

$$\vec{x} \cdot \vec{y} \le \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\|$$

Indicación: De nuevo reducir todo al caso $|\vec{x}| = 1$.

76. Tratar de generalizar la idea del problema anterior para probar la desigualdad de Hölder

$$x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n \le (|x_1|^p + |x_2|^p + \cdots + |x_n|^p)^{1/p}(|y_1|^q + |y_2|^q + \cdots + |y_n|^q)^{1/q}$$

para $p > 1$ y $q = p/(p-1)$.

77. En estática se denominan puntos de equilibrio a los puntos críticos del potencial V (la función que da la energía potencial por unidad de masa). Si un insecto vive en el elipsoide $x^2 + y^2 + 4z^2 = 1$, hallar sus puntos de equilibrio para el potencial gravitatorio usual en la superficie de la Tierra, $V(x, y, z) = 9,8\, z$. Estudiar el mismo problema si $V(\vec{r}) = \|\vec{r}\|^{-1}$ (esto corresponde a una gran masa en el centro del elipsoide). Interpretar el resultado geométrica y físicamente.

78. Calcular la integral,

$$\int_\sigma f\, ds\,,$$

de la función $f(x, y, z)$ dada, dibujando en cada caso el camino σ de integración.

a) $f(x, y, z) = x + y + z\,, \qquad \sigma(t) = (\operatorname{sen} t, \cos t, t)\,, \quad 0 \le t \le \pi\,.$

b) $f(x, y, z) = \dfrac{x + y}{y + z}\,, \qquad \sigma(t) = (t, \dfrac{2}{3}\, t^{3/2}, t)\,, \quad 1 \le t \le 2\,.$

c) $f : \mathbb{R}^3 \setminus \{y = 0\} \to \mathbb{R}$, definida mediante $f(x, y, z) = \dfrac{1}{y^3}\,,$

$\sigma(t) = (\log t, t, 2)\,, \quad 1 \le t \le e\,.$

79. *a)* Dibujar y calcular la longitud del arco de cicloide descrito por

$$\begin{cases} x = R\,(t - \sin t)\,, \\ y = R\,(1 - \cos t)\,, \qquad 0 \le t \le 2\pi\,. \end{cases}$$

b) Hallar la longitud de la cardioide que en coordenadas polares viene dada por $r = 1 + \cos\theta$, con $0 \le \theta \le \pi$. Dibujar esta curva.

c) Calcular el área de la región limitada por la cardioide anterior cuando $0 \le \theta \le 2\pi$.

80. Hallar la integral,

$$\int_C \vec{F} \cdot \vec{ds}\,,$$

del campo vectorial $\vec{F}$ a lo largo del camino orientado C que se indica. Dibujar en cada caso el camino de integración.

a) $\vec{F}(x,y) = (x^2+y^2, x^2-y^2)$, a lo largo de la curva $y = 1-|1-x|$, desde $(0,0)$ hasta $(2,0)$.

b) $\vec{F}(x,y) = (x^2-2\,x\,y, y^2-2\,x\,y)$, siendo C el arco de parábola $y=x^2$ que une los puntos $(-2,4)$ y $(1,1)$.

c) $\vec{F}(x,y) = (x+y, x-y)$, siendo C la elipse $x^2/a^2+y^2/b^2=1$, recorrida en el sentido contrario al de las agujas del reloj.

d) $\vec{F}(x,y) = (2-y, x)$, a lo largo del camino descrito por la cicloide $\sigma(t) = (t-\operatorname{sen} t, 1-\cos t)$, $0 \le t \le 2\pi$.

e) $\vec{F}(x,y) = \dfrac{1}{|x|+|y|}(1,1)$, donde C es el contorno del cuadrado de vértices $(1,0)$, $(0,1)$, $(-1,0)$ y $(0,-1)$, recorrido en el sentido contrario al de las agujas del reloj.

81. Hallar la longitud del arco de curva definido por

$$x = \operatorname{sen} t, \qquad y = \cos t, \qquad z = \cosh t, \qquad 0 \le t \le \log 7.$$

82. Calcular el flujo de $\vec{F}(x,y,z) = (x,y,z)$ a través del cilindro determinado por $x^2+y^2=a^2$, $0 \le z \le b$ con la normal exterior.

83. En cada punto (x,y,z) de la superficie

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \; z = 1 - \frac{x^2+y^2}{2}, \; x,y \in [0,1]\},$$

la densidad superficial es xy. Calcular la masa de S.

84. *a)* Hallar el área de la región de la esfera $x^2+y^2+z^2=R^2$ determinada por la relación $x^2+y^2 \le R\,x$. *Resultado:* $2R^2(\pi/2-1)$. (*Indicación:* Usar una parametrización con $x = r\cos\theta$, $y = r\operatorname{sen}\theta$).

b) Hallar el área de la superficie determinada por $x+y+z=1$ y $x^2+2\,y^2 \le 1$. *Resultado:* $\pi\sqrt{6}/2$.

c) Hallar el área de la superficie determinada por la gráfica de la función

$$f(x,y) = \frac{2}{3}\left(x^{3/2}+y^{3/2}\right)$$

que se levanta sobre el cuadrado $0 \le x, y \le 1$.

85. Una esfera inscrita en un cilindro circular recto se corta con dos planos paralelos perpendiculares al eje del cilindro. Demostrar que las porciones de la esfera y del cilindro comprendidas entre esos dos planos tienen igual área. *Nota*: Arquímedes empleó esta propiedad para calcular el área y el volumen de la esfera.

86. Calcular el flujo del campo $F(x,y,z) = (x^2+y^2, z, x)$ a través de la porción del cilindro $x^2+y^2=R^2$ determinada por $x,y \ge 0$ y $0 \le z \le h$ y orientada hacia el exterior. *Resultado:* $h\,R^3 + R\,h^2/2$.

87. Sea p_0 el punto de $\mathbb{R}^3$ de coordenadas $(0,0,1)$. Calcular el flujo del campo

$$F(p) = \frac{p - p_0}{\|p - p_0\|^2}\,, \qquad p = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3\,,$$

a través del triángulo esférico de vértices $(1,0,0), (0,1,0)$ y $(0,0,1)$ en la esfera de centro $\mathbf{O}$ y radio 1 con la normal exterior. *Resultado:* $\pi/4$.

88. Calcular la integral

$$\int_S \vec{F} \cdot d\vec{S} \qquad \text{con } \vec{F} = (2\,x, 5\,y, -4\,z),$$

sobre la esfera S de centro $\mathbf{O}$ y radio R, orientada hacia el exterior. *Resultado:* $4\pi\,R^3$.

89. Calcular el flujo de $\vec{F}(x,y,z) = (x,y,z)$ a través de la porción del paraboloide $z = x^2 + y^2$ en la región $x \geq 0,\ y \geq 0,\ 0 \leq z \leq 9$; considerando la orientación dada por la normal con tercera coordenada negativa. *Resultado:* $81\,\pi/8$.

90. Demostrar que si la gráfica de una función positiva $y = f(x)$ gira alrededor del eje X en el intervalo $[a,b]$, el área de la superficie obtenida viene dada por

$$2\pi \int_a^b f\,\sqrt{1 + (f')^2}\,.$$

91. Sea el campo $\vec{F}(x,y,z) = (y\,e^x, e^x + z, y)$. Compruébese que

$$\int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{s}\,,$$

donde C_1 es la recta que une el origen con $(1,1,1)$ y C_2 es la línea quebrada que une el origen con $(0,1,1)$ y después con $(1,1,1)$.

92. Calcular la integral del campo $\vec{F}(x,y) = (x^2 - y, x + xy + y^2)$ en la circunferencia unidad con la orientación positiva, primero empleando la definición y después empleando el teorema de Green.

93. Calcular el trabajo realizado por el campo

$$\vec{F} = (5\,x^{3/2}\,e^{y^2}, 4\,y\,x^{5/2}\,e^{y^2} + 5\,y^2)$$

a lo largo de la curva en polares $r = 2\,\theta^3$ desde $\theta = 0$ a $\theta = \pi/2$.

94. Dados los puntos $A = (2,0), B = (1,-1), C = (1,0)$ y $D = (0,-1)$ de $\mathbb{R}^2$, considérese el camino Γ formado por el arco AB de la circunferencia de centro C y los segmentos orientados BD, DO, OA (O es el origen de coordenadas). Calcular la integral

$$\int_\Gamma (x^4 - x^3 e^x - y)\,dx + (x - y \arctan y)\,dy\,.$$

95. Para cada uno de los siguientes campos vectoriales $\vec{F}(x,y)$ definidos en $\mathbb{R}^2$, determinar si son gradientes de algún potencial $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. En caso afirmativo, calcular el potencial f.

$$a)\quad \vec{F}(x,y) = (3\,x^2\,y, x^3)\,, \qquad b)\quad \vec{F}(x,y) = (2\,x\,e^y + y, x^2\,e^y + x - 2\,y),$$

$$c)\quad \vec{F}(x,y) = (\operatorname{sen} y - y \operatorname{sen} x + x, \cos x + x \cos y + y)\,,$$

$$d)\quad \vec{F}(x,y) = (\operatorname{sen} xy + x\,y \cos xy, x^2 \cos xy)\,.$$

96. Sea $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ a^2 \leq x^2 + y^2 \leq b^2\}$. Dividir D en dos regiones acotadas por sendas curvas cerradas simples y demostrar que para $\vec{F} = (P,Q) \in C^1(D)$ se cumple

$$\int_{C_b} \vec{F} \cdot d\vec{s} - \int_{C_a} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy$$

donde C_a y C_b son las circunferencias de radios a y b respectivamente, con la orientación positiva.

97. Hallar la integral de

$$\vec{F} = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right).$$

a lo largo de la circunferencia centrada de radio r con la orientación positiva. Hallar también

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$$

y explicar por qué esto no contradice el Teorema de Green.

98. Sea $\alpha : [0,1] \to \mathbb{R}^2$, $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ una trayectoria C^1 representando una curva cerrada simple, C, con la orientación positiva, acotando cierta región cerrada D. Sea

$$I(\alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_0^1 \frac{y'\,x - y\,x'}{x^2+y^2}\, dt.$$

a) Escribir $I(\alpha)$ como una integral de línea.
b) Demostrar que si $(0,0) \notin D$ entonces $I(\alpha) = 0$.
c) Demostrar que si $(0,0) \in D$ entonces $I(\alpha) = 1$. *Indicación:* Aplíquense los dos problemas anteriores.

99. Demuéstrese geométricamente (sin emplear el teorema de Green) la fórmula

$$\frac{1}{2} \int_\Gamma -y\, dx + x\, dy\,,$$

para el área encerrada por Γ. *Indicación:* Utilícese que $\frac{1}{2}(-b\,c + a\,d)$ es, salvo el signo, el área del triángulo que generan los vectores $\mathbf{v} = (a,b)$ y $\mathbf{w} = (c,d)$.

100. Para cada uno de los siguientes campos vectoriales $\vec{F}$ calcular el rotacional y la divergencia de $\vec{F}$.

a) $\vec{F}(x,y,z) = (x^2 + y\,z, y^2 + x\,z, z^2 + x\,y)$, *b)* $\vec{F}(x,y,z) = (2\,z - 3\,y, 3\,x - z, y - 2\,x)$,

c) $\vec{F}(x,y,z) = (e^{xy}, \cos xy, \cos xz^2)$, *d)* $\vec{F}(x,y,z) = (x^2 \operatorname{sen} y, y^2 \operatorname{sen} xz, xy \operatorname{sen}(\cos z))$.

101. Transformar la integral de superficie

$$\int_S \operatorname{rot} \vec{F} \cdot d\vec{S}\,,$$

en una integral de línea utilizando el Teorema de Stokes y calcular entonces la integral de línea en cada uno de los siguientes casos:

a) $\vec{F}(x,y,z) = (y^2, x\,y, x\,z)$, donde S es el hemisferio $x^2+y^2+z^2 = 1, z \geq 0$ y la normal tiene componente z no-negativa. *Resultado:* 0.

b) $\vec{F}(x,y,z) = (y,z,x)$, donde S es la parte del paraboloide $z = 1 - x^2 - y^2$ con $z \geq 0$ y la normal tiene componente z no-negativa. *Resultado:* $-\pi$.

c) $\vec{F}(x,y,z) = (y - z, y\,z, -x\,z)$, donde S consta de las cinco caras del cubo $0 \leq x, y, z \leq 2$ no situadas en el plano xy y la normal escogida es la exterior. *Resultado:* -4.

102. Utilizar el Teorema de Stokes para comprobar que las siguientes integrales de línea tienen los valores que se dan, indicando en cada caso el sentido en el que se recorre C para llegar al resultado.

a) Siendo C la curva intersección de la esfera $x^2+y^2+z^2=R^2$ y el plano $x+y+z=0$,

$$\int_C y\,dx + z\,dy + x\,dz = \pi R^2\sqrt{3}\,.$$

b) Siendo C la curva intersección del cilindro $x^2+y^2=2\,y$ y el plano $y=z$,

$$\int_C (y+z)\,dx + (z+x)\,dy + (x+y)\,dz = 0\,, \qquad \int_C y^2\,dx + x\,y\,dy + x\,z\,dz = 0\,.$$

c) Siendo C la curva intersección del cilindro $x^2+y^2=a^2$ y el plano $x/a+z/b=1$, con $a,b>0$,

$$\int_C (y-z)\,dx + (z-x)\,dy + (x-y)\,dz = 2\pi\,a(a+b)\,.$$

103. Para cada uno de los campos vectoriales que siguen, determinar un potencial, cuando el campo sea un campo conservativo,

a) $\vec{F}(x,y,z) = (x+z, -(y+z), x-y)$.

b) $\vec{F}(x,y,z) = (2\,x\,y^3, x^2\,z^3, 3\,x^2\,y\,z^2)$.

c) $\vec{F}(x,y,z) = (3\,y^4\,z^2, 4\,x^3\,z^2, -3\,x^2\,y^2)$.

d) $\vec{F}(x,y,z) = (4\,x\,y - 3\,x^2\,z^2 + 1, 2\,(x^2+1), -(2\,x^3\,z + 3\,z^2))$.

104. Sean C_x, C_y, $C_z \subset \mathbb{R}^3$ circunferencias de radio ε centradas en un mismo punto y paralelas, respectivamente, a los planos coordenados YZ, XZ, XY. Demostrar que en dicho punto se cumple

$$\operatorname{rot}\vec{F} = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\pi\varepsilon^2}\Big(\int_{C_x}\vec{F}\cdot d\vec{s}\,, \int_{C_y}\vec{F}\cdot d\vec{s}\,, \int_{C_z}\vec{F}\cdot d\vec{s}\Big)$$

para cualquier campo $\vec{F}\in C^1$.

105. Sea S la superficie formada por las porciones de la semiesfera $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ y del cono $z=\sqrt{x^2+y^2}$ con $x^2+y^2\le 1/2$. Calcular $\int_S \vec{F}\cdot d\vec{S}$ (con la normal exterior) donde

$$\vec{F} = (x\,z + e^{y\,\operatorname{sen} z}, 2\,y\,z + \cos xz, -z^2 + e^x\cos y).$$

106. Hallar la integral del campo

$$\vec{F} = (x + \cos y - \log(1+z^2), y + \operatorname{sen}\sqrt{1+x^2+z^2}, z)$$

sobre la esfera unidad con la normal exterior.

107. Hallar la integral de superficie

$$\int_S \vec{F}\cdot d\vec{S} \qquad \text{siendo} \qquad \vec{F} = (y-z, z-x, x-y)\,,$$

cuando S es el hemisferio norte de la esfera unidad orientada hacia el exterior. *Resultado:* 0.

108. Hallar la integral de superficie

$$\int_S \vec{F}\cdot d\vec{S} \qquad \text{siendo} \qquad \vec{F} = (x^3, y^3, -a\,b\,z),$$

cuando S es el elipsoide de revolución

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1\,,$$

orientado hacia el exterior.

109. Sea S la superficie del cubo $0 \leq x, y, z \leq 1$ con la orientación correspondiente a la normal exterior. Si $\vec{F}(x, y, z) = (x^2, y^2, z^2)$, calcular la integral

$$\int_S \vec{F} \cdot d\vec{S}$$

directamente y mediante el teorema de la divergencia.

110. Demostrar la llamada "fórmula de Green"

$$\int_V f \Delta g = -\int_V \nabla f \cdot \nabla g + \int_S f \, \nabla g$$

para V un dominio acotado de $\mathbb{R}^3$ limitado por S y f, g funciones C^2 arbitrarias. *Indicación:* Demostrar primero $\operatorname{div}(f \, \nabla g) = \nabla f \cdot \nabla g + f \Delta g$. Recuérdese que

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \cdot$$

111. Demostrar que para campos C^2

$$\operatorname{div}(\vec{F} \times \vec{G}) = \vec{G} \cdot \operatorname{rot} \vec{F} - \vec{F} \cdot \operatorname{rot} \vec{G}.$$

112. La segunda y la tercera ecuaciones de Maxwell afirman que si $\vec{E}$ y $\vec{B}$ son la intensidad de campo y la inducción magnética respectivamente, entonces

$$\int_{S_0} \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \qquad \text{y} \qquad \int_C \vec{E} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

para toda superficie cerrada S_0 y para toda superficie S cuya frontera es la curva C (con la orientación inducida). Escribir estas ecuaciones en forma diferencial de manera que no contengan integrales.

113. Supongamos que un fluido de densidad constante ρ ocupa la región $\{z < 0\} \subset \mathbb{R}^3$. Sobre cada unidad de área horizontal situada a profundidad $-z$, la columna de fluido que está por encima ejerce una fuerza (su peso) dada por $\vec{F} = (0, 0, -\rho g \, z)$; con lo cual es natural suponer que el empuje sufrido por un cuerpo totalmente sumergido limitado por una superficie S es $\int_S \vec{F}$ con la normal interior (el fluido empuja hacia dentro). A partir de este resultado demostrar el Principio de Arquímedes: *Todo cuerpo sumergido en un fluido experimenta un empuje igual al peso del volumen que desaloja.*