Hoja 1 de Problemas

1.- Demostrar por inducción

(i) $1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$.

(ii) $1^2+2^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

(iii) $1^3+2^3+\cdots+n^3=(1+2+\cdots+n)^2$.

(iv) $1+3+\cdots+(2n-1)=n^2$.

(v) $\forall\, n\geq 10,\ 2^n\geq n^3$.

(vi) $x^{2n}-y^{2n}$ es divisible por $x+y$.

(vii) $(a+b)^n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k}$, siendo $\displaystyle\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}$.

(viii) El número de rectas determinado por $n\geq 2$ puntos, de los cuales ningún trío pertenece a la misma recta, es $\frac{1}{2}n(n-1)$.

(ix) $4(1+5+5^2+\cdots+5^n)+1=5^{n+1}$.

(x) $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}$.

(xi) Si n no es múltiplo de 4 la suma $1^n+2^n+3^n+4^n$ es múltiplo de 10. (Comprobarlo para $n=1,2,3$ y demostrar que si es cierto para n, lo es para $n+4$.)

(xii) $n(n^2+5)$ es divisible por 6.

(xiii) $1+1\cdot 1!+2\cdot 2!+3\cdot 3!+\cdots+(n-1)\,(n-1)!=n!$ para $n\geq 2$.

(xiv) $\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)\,(\operatorname{sen}x+\operatorname{sen}(2x)+\cdots+\operatorname{sen}(n\,x))=\operatorname{sen}\left(\frac{n\,x}{2}\right)\,\operatorname{sen}\left(\frac{n+1}{2}\,x\right)$.

2.- Demostrar por inducción sobre n que

$$1+r+r^2+\cdots+r^n=\frac{1-r^{n+1}}{1-r},\qquad \text{si } r\neq 1.$$

3.- Encontrar el supremo y el ínfimo de los siguientes conjuntos de números reales. ¿Son máximo o mínimo en algún caso?

(i) $A=\{\frac{1}{n}+1:n\in\mathbb{N}\}$,

(ii) $B=A\cup\{1\}$,

(iii) $C=\{\frac{1}{n}-(-1)^n:n\in\mathbb{N}\}$,

(iv) $D=\{x\in\mathbb{Q}:x>0,x^2<3\}$,

(v) $E=\{x:x^2<4\}$,

(vi) $F=\{x:x^2\geq 4\}$,

(vii) $G=\{x:x^2\leq 4\}$,

(viii) $H=\{x:2<x^2\leq 4\}$.

4.- Si el conjunto A tiene un supremo, ¿qué podemos decir sobre $-A=\{-x:x\in A\}$?.

5.- Describe explícitamente los siguientes conjuntos. Estudiar su supremo, ínfimo, máximo, mínimo.

(i) $|x-2|<3$,

(ii) $|3x-2|<1$,

(iii) $|2x+5|>3$,

(iv) $x^2-4x+6<x$,

(v) $|x^2-3|\le 1$,

(vi) $x^2+x\le 2$,

(vii) $\frac{x-1}{x+2}>0$,

(viii) $|(x-2)(x-3)|<1$,

(ix) $|x-1|+|x-2|>1$,

(x) $|x-3|+|x+1|\le 1$,

(xi) $\frac{|x-2|}{|x-1|}>|x|$,

(xii) $\frac{|x+1|}{|x-1|}\ge 1$.

6.- Estudiar el límite de las siguientes sucesiones

(a) $\left\{\frac{n^2}{n+2}\right\}$

(b) $\left\{\frac{n^3}{n^3+2n+1}\right\}$

(c) $\left\{\frac{n}{n^2-n-4}\right\}$

(d) $\left\{\frac{\sqrt{2n^2-1}}{n+2}\right\}$

(e) $\left\{\frac{\sqrt{n^3+2n}+n}{n^2+2}\right\}$

(f) $\left\{\frac{\sqrt{n+1}+n^2}{\sqrt{n+2}}\right\}$

(g) $\left\{\frac{(-1)^n\,n^2}{n^2+2}\right\}$

(h) $\left\{\frac{n+(-1)^n}{n}\right\}$

(i) $\left\{\left(\frac{3}{2}\right)^n\right\}$

(j) $\left\{\left(\frac{5}{3}\right)^n\right\}$

(k) $\left\{\frac{2^n}{4^n+1}\right\}$

(l) $\left\{\frac{3^n+(-2)^n}{3^{n+1}+(-2)^{n+1}}\right\}$

(m) $\left\{\frac{n}{n+1}-\frac{n+1}{n}\right\}$

(n) $\left\{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right\}$

(o) $\left\{\left(\sqrt{2n+3}-\sqrt{2n}\right)\sqrt{n}\right\}$

(p) $\left\{\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}\right)n^{\frac{1}{4}}\right\}$

(q) $\left\{\sqrt{n^2+2\,n}-n\right\}$

(r) $\left\{\left(a^n+b^n\right)^{\frac{1}{n}}\right\}$, $\quad a,b>0.$

(s) $\left\{\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\cdots+\frac{n}{n^2}\right\}$

(t) $\left\{\frac{1+3+\cdots(2\,n-1)}{n+1}-\frac{2\,n+1}{2}\right\}$

7.- Encontrar una expresión de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}$ como cociente de dos polinomios en n. $\left(\text{Indicación: } \dfrac{1}{k(k+1)}=\dfrac{1}{k}-\dfrac{1}{k+1}\right)$. Como aplicación calcular el límite de la sucesión S_n, donde $S_n=\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\dfrac{1}{n(n+1)}$.

8.- Calcular

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n^2+1}+\frac{n+2}{n^2+2}+\cdots+\frac{n+n}{n^2+n}\right).$$

9.- Sea $a>1$, se define por recurrencia la sucesión $\{a_n\}$ por la relación $a_n=\sqrt{a\cdot a_{n-1}}$, $a_1=\sqrt{a}$. Probar que es una sucesión monótona creciente y acotada. Hallar su límite.

10.- Sea $\{a_n\}$ una sucesión de números reales definida por a_1 un número mayor que $-\frac{3}{2}$ y $a_{n+1}=\sqrt{2\,a_n+3}$. Demostrar que la sucesión converge y calcular su límite. Indicación: distinguir el caso $a_1\ge 3$ y $a_1<3$.

11.- Sea $a_1 = 1$. Definimos las siguientes sucesiones por recurrencia:

$$(i)\, a_{n+1} = \frac{1}{4}\, a_n, \quad (ii)\, a_{n+1} = \frac{1}{n+1}\, a_n, \quad (iii)\, a_{n+1} = \frac{n}{n+1}\, a_n \quad \text{y} \quad (iv)\, a_{n+1} = \frac{1}{2}\, a_n + 1.$$

Probar que cada una de ellas es acotada y monótona. Hallar el límite. (En alguno de los casos puede ser interesante escribir de forma explícita la expresión que tiene la sucesión).

12.- Se define recurrentemente la sucesión $a_1 = a > 0$ y $a_n = a_{n-1} + \frac{1}{a_{n-1}}$. ¿Es convergente la sucesión?.

13.- Interpretar las expresiones siguientes como el límite de una sucesión definida de forma recurrente:

$$(i)\ \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\ldots}}}, \qquad (ii)\ 1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cdots}}, \qquad \text{y} \qquad (iii)\ 1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cdots}}.$$

Probar que esos límites existen y calcular su valor numérico.

14.- Demostrar que si $a_n \longrightarrow \infty$ cuando $n \to \infty$, entonces

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = e \qquad \text{y} \qquad \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = \frac{1}{e}.$$

15.- Calcular, si existen, los límites de las sucesiones que tienen como término general

$$a_n = \left(\frac{n^2+1}{n^2}\right)^{2\,n^2-3}, \qquad b_n = \left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^{2\,n^2+3} \qquad \text{y} \qquad c_n = a_n + \frac{1}{b_n}.$$

16.- Probar por inducción que para $n = 1, 2, \ldots$,

$$2^{n-1}\, n! \le n^n \le e^{n-1}\, n!.$$

Como aplicación probar las siguientes afirmaciones:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0 \qquad \text{y} \qquad \lim_{n\to\infty} (n!)^{\frac{1}{n}} = \infty,$$

17.- Hallar los siguientes límites

$$\lim_{n\to\infty} (n^3-1)^{\frac{1}{3\,n}} \qquad \text{y} \qquad \lim_{n\to\infty} n\left((n+1)^{\frac{1}{n}} - n^{\frac{1}{n}}\right).$$

18.- Demostrar que si $A \subset \mathbb{R}$ está acotado superiormente, existe una sucesión $\{a_n\}$ con $a_n \in A$ y tal que $\lim_{n\to\infty} a_n = \sup A$.

19.- La sucesión de término general $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$ cumple que, dado $\varepsilon > 0$, existe n_0 tal que $|a_{n+1} - a_n| < \varepsilon$ para $n > n_0$. Demostrar que, sin embargo, la sucesión no es de Cauchy.

20.- Sean A y B dos subconjuntos no vacíos de números reales tales que $a < b$ para todo $a \in A$ y $b \in B$. Demostrar que existen $\sup A$, $\inf B$, y que además, $\sup A \leq \inf B$. Dar un ejemplo donde estos dos valores coincidan.

21.- Para A y B dos subconjuntos no vacíos de $\mathbb{R}$, definimos $C = \{a+b : a \in A,\, b \in B\}$. Si A y B están acotados superiormente, probar que C también lo está y que $\sup C = \sup A + \sup B$. ¿Puede darse un teorema análogo para el producto? ¿Y si A, B son conjuntos de números positivos?

22.- Sea $A \subset \mathbb{R}$. Probar que $s = \sup A$, si y sólo si, para todo n natural $s - \frac{1}{n}$ no es cota superior de A y $s + \frac{1}{n}$ es cota superior de A.

23.- Donde está el fallo en los siguientes razonamientos:

(a) Sea $x = y$, entonces $x^2 = x\,y$ y $x^2 - y^2 = x\,y - y^2$. Así, $(x+y)\,(x-y) = y\,(x-y)$, es decir, $x + y = y$. De aquí se sigue que $2y = y$ y por lo tanto $2 = 1$. **Contradicción!!!**

(b) Vamos a hallar los x que verifican

$$\frac{x+1}{x-1} \geq 1.$$

Esta desigualdad es equivalente a $x + 1 \geq x - 1$, o lo que es los mismo $1 \geq -1$. Como esto es cierto para todo $x \in \mathbb{R}$, se sigue que el conjunto de valores que verifican la desigualdad anterior es $\mathbb{R}$. De esta forma, tomando en particular $x = -1$ obtenemos

$$0 = \frac{-1+1}{-1-1} \geq 1. \qquad \textbf{Contradicción!!!}$$