

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE MADRID

CÁLCULO I
Curso 2002-03

CIENCIAS MATEMÁTICAS
11 DE SEPTIEMBRE DE 2003

Apellidos

Nombre DNI

1. (1 punto). Una sucesión $\{a_n\}$ se define mediante

$$a_0 = \alpha, \quad a_{n+1} = \frac{1}{4}(1 + a_n), \quad n \geq 0.$$

Cuando $\alpha < 1/3$ demuestra que $\{a_n\}$ está acotada superiormente por $1/3$ y es creciente. Calcula su límite.

2. a) (1 punto). Estudia la convergencia de la serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{14}}{2^n}.$$

b) (1,5 puntos). Demuestra que $\frac{1}{3n-2} + \frac{1}{3n-1} - \frac{1}{3n} \geq \frac{1}{3n}$ para $n \geq 1$, y deduce que la serie

$$1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} - \frac{1}{9} + \dots$$

es divergente.

3. a) (1,5 puntos). Dibuja la gráfica de la función

$$f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$$

indicando sus máximos y mínimos locales, su convexidad, su concavidad, sus puntos de inflexión y sus asíntotas, si las hubiera.

b) (1,5 puntos). Halla el polinomio de Taylor de orden 4 de $f(x)$ en $a = 0$.

4. (1 punto). Halla las dimensiones del rectángulo de mayor área que puede inscribirse en una semicircunferencia de radio a .

5.

a) (1 punto) Calcula $\int_0^1 x \operatorname{arctg} x \, dx$.

b) (1,5 puntos) Calcula $\int \frac{4x + 11}{x^3 - x^2 + 2x - 2} \, dx$.

DURACIÓN : 3 HORAS