

Título de la tesis doctoral: Curvas hiperelípticas modulares

Autor: Enrique González Jiménez

Director: Josep González Rovira

Resumen

El objetivo de esta tesis es generalizar la anteriormente conocida como *Conjetura de Shimura-Taniyama-Weil* a otras familias de curvas no elípticas. Dicha conjetura, establecía que para toda curva elíptica definida sobre \mathbb{Q} existe un recubrimiento definido sobre \mathbb{Q} desde alguna curva modular $X_0(N)$. Recientemente, esta conjetura ha sido demostrada en su totalidad por Christophe Breuil, Brian Conrad, Fred Diamond y Richard Taylor siguiendo las directrices marcadas por los trabajos de Andrew Wiles.

Una vez demostrada esta conjetura, parece natural determinar otras familias de curvas definidas sobre \mathbb{Q} que sean modulares, entendida la modularidad de una curva como la propiedad de admitir un recubrimiento definido sobre \mathbb{Q} desde alguna curva modular $X_1(N)$. Éste es el punto de partida de esta tesis. Más concretamente, nuestro objetivo es el estudio de las curvas hiperelípticas que son modulares.

El estudio de curvas de género mayor que 1 definidas sobre \mathbb{Q} (no necesariamente hiperelípticas) que son modulares presenta diferencias notables respecto del caso de curvas elípticas definidas sobre \mathbb{Q} , ya que estas últimas se identifican con sus jacobianas y, además, como variedades abelianas son \mathbb{Q} -simples. Así, para una curva modular definida sobre \mathbb{Q} de género 1 siempre existe un recubrimiento definido sobre \mathbb{Q} desde alguna curva modular $X_1(N)$, tal que el correspondiente morfismo entre las jacobianas factoriza a través de la parte nueva de la jacobiana de $X_1(N)$. No obstante, esta condición no puede garantizarse para curvas de género mayor que 1. Llamaremos curvas *modulares nuevas de nivel N* a aquellas que satisfacen la anterior condición. Esta familia de curvas contiene a todas las curvas elípticas definidas sobre \mathbb{Q} y nuestro estudio se restringirá a las curvas modulares nuevas que son hiperelípticas.

A diferencia del caso elíptico y de manera sorprendente, el conjunto de curvas hiperelípticas modulares nuevas es finito, tal como se demuestra en esta tesis. Tras haber obtenido este inesperado resultado, nuestro objetivo se ha encaminado en la determinación de estas curvas, es decir, a encontrar ecuaciones y los correspondientes morfismos que las hacen modulares. Para ello, hemos acotado sus géneros y encontrado condiciones sobre los niveles correspondientes. Creando paquetes computacionales, que recogían los resultados teóricos demostrados, y utilizando propiedades de las curvas modulares y de las curvas hiperelípticas, hemos conseguido probar que solamente existen 213 de tales curvas con género 2 y encontrado ecuaciones para cada una de ellas. Para el caso de género mayor que 2, hemos calculado 75 de tales curvas y presentamos evidencias numéricas que sugieren que éstas son todas las curvas hiperelípticas modulares nuevas.