Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias
Universidad Autónoma de Madrid

El Problema del Ganado de Arquímedes

Trabajo de fin de grado

Grado en Matemáticas

Autora: Sofía Almendros Corrales
Tutor: Enrique González Jiménez

Curso 2020-2021

Resumen

A lo largo de la historia, la ecuación de Pell ha aparecido en diversos problemas matemáticos. Arquímedes pudo ser el primero en plantear un problema, conocido como el Problema del Ganado, cuya resolución requería del conocimiento de estas ecuaciones, siendo éstas de la forma $x^2 - Dy^2 = 1$, para $D \in \mathbb{Z}_{>0}$ libre de cuadrados y donde $x, y \in \mathbb{Z}$. Para la resolución de las mismas, conviene factorizarlas en $\mathbb{Z}[\sqrt{D}]$, de manera que los elementos con norma unitaria de dicho anillo se corresponderán con las soluciones a la ecuación de Pell. Demostraremos que esta ecuación tiene siempre solución, lo que es más, tiene infinitas y todas ellas pueden obtenerse como potencia de la que conocemos como solución fundamental. A partir de esto, analizaremos la relación de estas ecuaciones con la norma de un elemento del anillo de enteros de un cuerpo cuadrático, para así poder demostrar un caso particular del Teorema de las Unidades de Dirichlet, que muestra que el grupo de unidades del anillo de enteros es infinito en el caso de cuerpos cuadráticos reales. El método de aproximación de número irracionales mediante fracciones continuas constituye una herramienta clave para la resolución de estas ecuaciones, pues proporcionan una aproximación racional muy próxima a números irracionales. Para ser capaces de mostrar la solución del ganado, analizaremos cómo resolver la ecuación de Pell con fracciones continuas obteniendo la solución fundamental de la misma y veremos cómo obtener el resto de soluciones a partir de la fundamental. Finalmente, usaremos herramientas tales como la aritmética modular para dar una solución definitiva al problema de las infinitas que tiene.

Abstract

Throughout history, Pell's equation has appeared in various mathematical problems. Archimedes may have been the first to pose a problem, known as the Cattle Problem, whose solution required knowledge of these equations, being of the form $x^2 - Dy^2 = 1$, for $D \in \mathbb{Z}_{>0}$ free of squares and where $x, y \in \mathbb{Z}$. In order to solve them, it is convenient to factor them in $\mathbb{Z}[\sqrt{D}]$, so that the elements with unit norm of that ring will correspond to the solutions to the Pell equation. We will show that this equation always has a solution, what is more, it has infinitely many solutions and all of them can be obtained as a power of the one we know as the fundamental solution. From this, we will analyze the relation of these equations with the norm of an element of the ring of integers of a quadratic field, in order to prove a particular case of Dirichlet's Unit Theorem, which shows that the group of units of the ring of integers is infinite in the case of real quadratic fields. The method of approximation of irrational numbers by continued fractions is a key tool for solving these equations, since it provides a very close rational approximation to irrational numbers. In order to be able to prove the solution of the cattle, we will analyze how to solve the Pell equation with continued fractions obtaining the fundamental solution of the same one and we will see how to obtain the rest of solutions from the fundamental one. Finally, we will use tools such as modular arithmetic to give a definite solution to the problem.

Índice general

Introducción

El *Problema del Ganado de Arquímedes*, también conocido actualmente como *el Problema del Ganado*, es un problema interesante cuya resolución se basa en la solución a la ecuación de Pell, siendo ésta toda ecuación diofántica de la forma $x^2 - Dy^2 = 1$, con $D \in \mathbb{Z}_{>0}$ libre de cuadrados.

El nombre de estas ecuaciones se debe a un error cometido por Leonhard Euler $(1707 - 1783)$, quien pensaba que el estudio profundo de éstas había sido realizado por John Pell $(1610 - 1685)$, sin embargo, fue William Brouncker $(1620 - 1683)$ quien desarrolló un procedimiento que involucraba fracciones continuas para resolver las ecuaciones que actualmente conocemos como ecuaciones Pell. Aunque Brouncker utilizó fracciones continuas y obtuvo soluciones, fue Joseph-Louis Lagrange $(1736 - 1813)$ el matemático que demostró que tenía infinitas soluciones y pulió el método de la fracción continua.

El Problema del Ganado fue publicado en 1773 por Gotthold Ephraim Lessing $(1729 - 1781)$, poeta y literario que trabajó en la Biblioteca Herzog-August de Wolfenbüttel (Alemania). Lessing publicó un epigrama griego que había editado a partir de un manuscrito árabe. Éste consta de una cabecera, 22 dísticos elegíacos así como una falsa solución del problema y un análisis del mismo llevado a cabo por Chr. Leiste.

En 1880, Krumbiegel [5], cuestionó que Arquímedes fuese realmente el autor del poema, lo cual ocasionó la actual controversia con el título del mismo. Si bien es cierto que Arquímedes es quien planteó el problema matemático en sí, caben dudas de su originalidad y en su lugar, se le atribuye a helenistas. Por el contrario, Fraser [2] fue capaz de justificar de manera casi irrefutable que Arquímedes era el verdadero autor del poema.

Las traducciones mas frecuentes del problema han sido publicadas por Thomas [10], Hillion y Lenstra [3]. La traducción de la cabereza se le atribuye a Fraser [2] y es la siguiente:

"Problema que Arquímedes planteó en forma epigramática y envió a los interesados en estas cuestiones en Alejandría, en la carta dirigida a Eratóstenes de Cirene."

Presentamos la traducción elaborada por Thomas [10] del problema al español:

"El dios sol tenía un rebaño formado por un cierto número de toros blancos, negros, moteados y amarillos, así como vacas de los mismos colores. De tal forma que el número de toros blancos es la mitad y la tercera parte de los negros más los amarillos.

El número de toros negros es igual a la cuarta más la quinta parte de los moteados más los amarillos. El número de toros moteados es igual a la sexta más la séptima parte de los blancos más los amarillos. El número de vacas blancas es igual a un tercio más un cuarto de la suma de los toros negros y las vacas negras. El número de vacas negras es igual a la cuarta parte más la quinta parte de la suma de los toros moteados más las vacas moteadas. El número de vacas moteadas es igual a la quinta más la sexta parte de la suma de los toros amarillos más las vacas amarillas. El número de vacas amarillas es igual a la sexta más la séptima parte de la suma de los toros blancos más las vacas blancas. La suma de los toros blancos y negros es un número cuadrado y la suma de los toros moteados y amarillos es un número triangular. ¿Cómo estaba compuesto el rebaño?"

La solución de la primera parte del problema, correspondiente con las líneas $1-12$, sólo requiere del manejo de álgebra lineal y resolución de un sistema lineal de siete ecuaciones y ocho incógnitas. La parte compleja del problema se halla en la segunda parte, cuando se establece la condición de que la suma de toros blancos y negros debe ser un número cuadrado y a su vez, la suma de los toros moteados y amarillos debe resultar ser un número triangular. Con esto, la resolución del problema requiere del conocimiento de las ecuaciones de Pell.

A lo largo de los años han surgido algunas controversias con la redacción del problema, pero no se han aceptado cambios considerables. La duda más significativa gira en torno a la segunda parte del problema, donde usamos que la suma de toros blancos y negros es un cuadrado. El conflicto surge entre la interpretación de la suma de éstos como número cuadrado de la forma u^2 para un cierto entero positivo, con lo que llegamos a que el Problema del Ganado se reduce a la resolución de una ecuación de Pell, o si lo que realmente quería decir Arquímedes era que los toros, cuando se empaquetan juntos, deben formar una figura cuadrada, ya que estos animales son más largos que anchos. La resolución al problema de esta segunda manera fue dada por Wurm [13] y la añadimos en el Apéndice A.

Con el fin de ser capaces de resolver la ecuación de Pell que obtenemos al plantear el Problema del Ganado, en el primer capítulo estudiamos a fondo estas ecuaciones, siendo un caso particular de ecuaciones diofánticas, es decir, un caso particular de ecuaciones cuyas soluciones solo admiten valores enteros y en ocasiones, racionales. Veremos que tales ecuaciones tienen siempre solución y llamaremos fundamental a la mínima solución con componentes x, y positivas. Lo que es más, las ecuaciones de Pell tienen infinitas soluciones y todas ellas pueden obtenerse como potencias de la solución fundamental. Para ser capaces de resolver la ecuacion de Pell, es conveniente factorizarla en $\mathbb{Z}[\sqrt{D}]$ de la forma $x^2 - Dy^2 = (x + y\sqrt{D})(x - y\sqrt{D}) = 1$, de manera que encontrar soluciones a la ecuación de Pell es equivalente a encontrar elementos de $\mathbb{Z}[\sqrt{D}]$ con norma 1. Si denotamos como $R(n)$ al conjunto de elementos de $\mathbb{Z}[\sqrt{D}]$ cuya norma es n, demostraremos que $R(1)$ es infinito. Estudiaremos tambien los conjuntos $R(-1)$, $R(\pm 4)$ con el fin de caracterizar el grupo de unidades del anillo de enteros de un cuerpo cuadrático.

El estudio de cuerpos de números algebraicos es una pieza fundamental para nuestro interés principal: las ecuaciones de Pell, en concreto, vamos a prestar especial atención al caso de los cuerpos de números cuadráticos. A lo largo del segundo capítulo,

caracterizaremos el anillo de enteros de un cuerpo cuadrático K, al que denotaremos por $\mathcal{O}_K$, siendo éste el conjunto que incluye todos los elementos $\alpha \in \mathbb{C}$ que pertenecen a K cuyo polinomio mínimo tiene coeficientes enteros. Con su correspondiente caracterización, procederemos a demostrar el Teorema de las Unidades de Dirichlet para cuerpos cuadráticos, que demuestra que el grupo multiplicativo de las unidades de $\mathcal{O}_K$ es infinito para el caso real y por otro lado, finito para el imaginario.

Los distintos métodos que conocemos para resolver la ecuación de Pell se unifican en lo que se conoce como fracciones continuas, las cuales permiten una representación de los números reales alternativa a su expresión decimal y más ligada a sus propiedades algebraicas. A lo largo del tercer capítulo, desarrollaremos algunas de las propiedades estándar de las fracciones continuas y caracterizaremos los números cuadráticos, es decir, los que son raíz de una ecuación racional de segundo grado, como aquellos cuya fracción continua es periódica, resultado recogido en el Teorema de Lagrange. Finalmente, implementaremos el uso de fracciones continuas como herramienta para el cálculo de soluciones de la ecuación de Pell, viendo cómo obtener la solución fundamental de la misma.

Finalmente, en el último capítulo, usaremos todos los resultados y procedimientos descritos en los apartados anteriores para ser capaces de resolver el Problema del Ganado. La primera parte del problema requiere del manajo del álgebra lineal. La segunda requerirá de herramientas más complejas, por lo que recurriremos a la aritmética modular y realizaremos un test de divisibilidad que nos llevará a encontrar las soluciones al problema planteado por Arquímedes.

Por último, en el primer Apéndice añadiremos la demostración y resolución del problema de Wurm, seguido de un segundo Apéndice que incluye definiciones necesarias para el entendimiento del contenido del trabajo. Finalmente, incorporaremos un tercer Apéndice que incluye demostraciones de nivel más elemental relacionadas con resultados del capítulo de fracciones continuas.

CAPÍTULO 1
Ecuaciones de Pell

A lo largo de este capítulo estudiaremos las ecuaciones de Pell, que son un tipo concreto de ecuaciones diofánticas. El Problema del Ganado se resuelve con una ecuación de Pell, en este capítulo veremos que tales ecuaciones tienen siempre solución, lo que es más, tienen infinitas de ellas y pueden obtenerse como potencias de la que se conoce como solución fundamental.

1.1. La ecuación de Pell

Definición 1.1. Una **ecuación diofántica** es una ecuación algebraica con coeficientes enteros cuyas incógnitas solo pueden asumir valores enteros o en ocasiones, racionales.

Nuestro trabajo se centra en el estudio de un caso particular de ecuación diofántica: la ecuación de Pell. Estudiaremos cuándo esta ecuación tiene un número finito de soluciones y cuando infinito. En este último caso, caracterizaremos todas ellas.

Definición 1.2. Se define como **ecuación de Pell** toda ecuación diofántica de la forma

$$x^2 - D\,y^2 = 1, \quad D \in \mathbb{Z}. \tag{1.1}$$

En este capítulo vamos a discutir las soluciones enteras de esta ecuación en el caso en el que $D \in \mathbb{Z}_{>0}$ con D libre de cuadrados. Para ello, es intersante considerar la factorización en $\mathbb{Z}[\sqrt{D}] = \{a + b\sqrt{D} : a, b \in \mathbb{Z}\}$, de forma que:

$$x^2 - D\,y^2 = (x + y\sqrt{D})\,(x - y\sqrt{D}) = 1.$$

Es decir, si llamamos $\alpha = x + y\sqrt{D}$ y $\alpha' = x - y\sqrt{D}$ y consideramos su norma en $\mathbb{Z}[\sqrt{D}]$, siendo esta $N(\alpha) = \alpha\,\alpha' = x^2 - Dy^2$, encontrar soluciones a la ecuación de Pell es equivalente a encontrar elementos $\alpha \in \mathbb{Z}[\sqrt{D}]$ tales que $N(\alpha) = 1$. Veamos que la ecuación de Pell (1.1) tiene siempre una solución no trivial ($y \neq 0$) cuando D es un entero positivo y no es un cuadrado perfecto. Para ello resolvemos, dado $D \in \mathbb{Z}$, con $D > 0$ la ecuación diofántica

$$x^2 - D\,y^2 = z. \tag{1.2}$$

Observación 1.3. Recordemos que la norma de un elemento es multiplicativa $N(\alpha\beta) = N(\alpha)\ N(\beta)$.

Veamos primero unos lemas:

Lema 1.4. *Sea $k \in \mathbb{Z}_{>0}$. Entonces siempre existen enteros x e y tales que*

$$| x - y\sqrt{D} | < \frac{1}{k} \leq \frac{1}{| y |}.$$

Demostración. Para cada entero y tal que $0 \leq y \leq k$, ponemos $x = \lfloor y\sqrt{D} \rfloor$ donde $\lfloor x \rfloor = min\{k \in \mathbb{Z} : x \leq n\}$. Entonces para cada par $(x, y) = (\lfloor y\sqrt{D} \rfloor, y)$ tenemos que:

$$0 < x - y\sqrt{D} < 1.$$

Ahora dividimos el intervalo $[0, 1]$ en k subintervalos, cada uno de longitud $\frac{1}{k}$. Por el Principio del Palomar, dos de los $k + 1$ pares, llamémoslos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) caen en el mismo intervalo (tenemos k intervalos y $k + 1$ pares, luego al menos dos caen en el mismo). Como $y_1 \neq y_2$ entonces $x_1 - y_1\sqrt{D}$ y $x_2 - y_2\sqrt{D}$ son distintos y por tanto,

$$| x_1 - x_2 - (y_1 - y_2)\sqrt{D} | < \frac{1}{k}.$$

(pues al estar en el mismo intervalo y ser distintos, están a una distancia menor que $\frac{1}{k}$). Además, como $| y_1 - y_2 | \leq k$, llegamos a que

$$| x_1 - x_2 - (y_1 - y_2)\sqrt{D} | < \frac{1}{k} < \frac{1}{| y_1 - y_2 |} \text{ y tomando } x = x_1 - x_2,\ y = y_1 - y_2$$

llegamos al resultado buscado. □

Corolario 1.5. *Existen infinitos elementos $\alpha = x + y\sqrt{D} \in \mathbb{Z}[\sqrt{D}]$ tales que*

$$| \alpha' | = | x - y\sqrt{D} | < \frac{1}{| y |}. \tag{1.3}$$

Denotamos por S al siguiente conjunto:

$$S = \left\{ \alpha = x + y\sqrt{D} \in \mathbb{Z}[\sqrt{D}] \ : | \alpha' | = | x - y\sqrt{D} | < \frac{1}{| y |} \right\}. \tag{1.4}$$

Demostración del Corolario 1.5. Supongamos que existen una cantidad finita de elementos que satisfacen (1.3), es decir, suponemos que S es un conjunto finito. Entonces existe $M \in \mathbb{Z}$ tal que

$$\frac{1}{M} < min\ \{\ x - y\sqrt{D} : x + y\sqrt{D} \in S\ \}.$$

Por el Lema 1.4, existen x' e y' tales que:

$$| x' - y'\sqrt{D} | < \ min\ \left\{ \frac{1}{M}, \frac{1}{y'} \right\}.$$

Como $| x' - y'\sqrt{D} | < \frac{1}{y'}$, entonces $x' + y'\sqrt{D} \in S$. Sin embargo, como $| x' - y'\sqrt{D} | < \frac{1}{M} < min\ \{\ x - y\sqrt{D} : x + y\sqrt{D} \in S\ \}$, llegamos a una contradicción y por tanto, no es posible que el conjunto S sea finito. □

Teorema 1.6. *Existen infinitas soluciones para la ecuación* $x^2 - D\,y^2 = z$ *con* $x, y \in \mathbb{Z}$ *para cualquier* $z \in \mathbb{Z}$ *con* $|\, z \,| < 1 + 2\sqrt{D}$.

Demostración. Si $\alpha = x + y\sqrt{D} \in S$, entonces

$$|\, x + y\sqrt{D} \,| \leq |\, x - y\sqrt{D} \,| + |\, 2y\sqrt{D} \,| < \frac{1}{|\, y \,|} + |\, 2y\sqrt{D} \,|\,.$$

En tal caso,

$$|\, N(\alpha) \,| = |\, x^2 - Dy^2 \,| = |\, x - y\sqrt{D} \,|\, |\, x + y\sqrt{D} \,| < \left(\frac{1}{|\, y \,|}\right)\left(\frac{1}{|\, y \,|} + |\, 2y\sqrt{D} \,|\right) =$$
$$= \frac{1}{y^2} + 2\sqrt{D} \leq 1 + 2\sqrt{D}.$$

Por tanto, para todo $\alpha \in S$, se tiene que $|\, x^2 - Dy^2 \,| \leq 1 + 2\sqrt{D}$. Como existen infinitos elementos en S, pero sólo hay una cantidad finita de ellos que son menores que $1+2\sqrt{D}$, por el Principio del Palomar, una cantidad infinita de $\alpha = x+y\sqrt{D} \in S$ deben tener una norma cuyo un valor sea el mismo, por lo que para cada $1+2\sqrt{D}$ fijo, exiten una cantidad infinita de elementos para los que $x^2 - D\,y^2 = z$ para cualquier $z \in \mathbb{Z}$ fijo con $|\, z \,| < 1 + 2\sqrt{D}$, lo cual concluye la demostración. □

Si llamamos $R(z)$ al conjunto de $\alpha \in \mathbb{Z}[\sqrt{D}]$ tales que $N(\alpha) = z$, observamos que $R(z)$ tiene cardinal infinito fijado $z \in \mathbb{Z}$. Con esto podemos demostrar el teorema principal de esta sección.

Teorema 1.7. *La ecuación de Pell* $x^2 - Dy^2 = 1$ *siempre tiene al menos una solución entera no trivial, es decir,* $y \neq 0$.

Demostración. De acuerdo con el Teorema 1.6, fijado $z \in \mathbb{Z}$, existe una cantidad infinita de soluciones $\alpha = x + y\sqrt{D} \in \mathbb{Z}[\sqrt{D}]$ tales que:

$$x^2 - D\,y^2 = z \quad \text{para cualquier } z \in \mathbb{Z} \text{ fijo con } |\, z \,| < 1 + 2\sqrt{D}. \tag{1.5}$$

Como tenemos infinitas soluciones de (1.5) y sólo hay una cantidad finita de clases (mod z) en $\mathbb{Z}[\sqrt{D}]$ por el Principio del Palomar alguna de ellas debe contener al menos tres soluciones, de hecho, infinitas.
Tomamos $\alpha_1 = x_1 + y_1\sqrt{D}$, $\alpha_2 = x_2 + y_2\sqrt{D}$ tales que satisfacen (1.5), es decir, $N(\alpha_1) = N(\alpha_2) = \pm z$ de manera que sean $\alpha_1 \equiv \alpha_2 \pmod{z}$ donde $\alpha_1 \neq \pm\alpha_2$. Esto es posible porque si hay infinitos elementos y tenemos que clasificarlos en una cantidad finita de clases, existe alguna de éstas que tiene infinitos elementos por el Principio del Palomar. Luego de esa clase en la que hay infinitos elementos, podemos tomar dos de ellos que sean distintos y que cumplan que no son opuestos. Como $\alpha_1 \equiv \alpha_2 \pmod{z}$ entonces $\alpha_1\,\alpha_2' \equiv \alpha_2\,\alpha_2' \pmod{z}$ y observando que $N(\alpha_2) = \alpha_2\,\alpha_2' = \pm z$, nos queda que:

$$\alpha_1\,\alpha_2' \equiv \alpha_2\,\alpha_2' \equiv 0 \pmod{z}.$$

Por tanto, $\beta = \frac{\alpha_1\,\alpha_2'}{z} \in \mathbb{Z}[\sqrt{D}]$. Tal β es de la forma $\beta = \frac{x_1x_2 - Dy_1y_2}{z} + \sqrt{D}\,\left(\frac{x_2y_1 - x_1y_2}{z}\right)$ y verifica que:

$$N(\beta) = \beta\,\beta' = \left(\frac{\alpha_1\,\alpha_2'}{z}\right)\left(\frac{\alpha_1\,\alpha_2'}{z}\right)' = \frac{\alpha_1\,\alpha_1'\,\alpha_2\,\alpha_2'}{z^2} = \frac{N(\alpha_1)\,N(\alpha_2)}{z^2} = 1.$$

Por tanto, hemos encontrado $\beta \in \mathbb{Z}[\sqrt{D}]$ tal que $N(\beta) = 1$, y con ello hemos hallado una solución no trivial a la ecuación de Pell (1.1).
Observemos que con la hipótesis de que $\alpha_1 \neq \pm\alpha_2$ excluimos el caso de que $\beta = x + y\,\sqrt{D}$ sea solución trivial de la ecuación de Pell, es decir, excluimos el caso en el que $y = 0$. Si fuese $y = 0$, entonces $N(\beta) = x^2 - Dy^2 = 1$ si y solo si $x = \pm 1$, de manera que $\beta = \pm 1$. Usando la construcción de β tendríamos que:

$$\beta = \frac{\alpha_1\,\alpha_2'}{z} = \pm 1 \iff \alpha_1\,\alpha_2' = \pm z = \pm\alpha_1\,\alpha_1'.$$

Esta última cadena de igualdades implica que $\alpha_1' = \pm\alpha_2'$ y en consecuencia, $\alpha_1 = \pm\alpha_2$, contrario a nuestra hipótesis. □

1.2. Caracterización de soluciones de la ecuación de Pell

Hemos visto que la ecuacion de Pell tiene al menos una solucion no trivial. Veamos que tiene infinitas y a su vez pasamos a caracterizar todas ellas para lo que necesitamos introducir el concepto de solución fundamental de la ecuación de Pell.

Observación 1.8. Sea $D \in \mathbb{Z}_{>0}$ libre de cuadrados. Consideramos el conjunto:
$R(1) = \{\ \alpha \in \mathbb{Z}[\sqrt{D}] : N(\alpha) = 1\ \}$, es decir, el conjunto de unidades de $\mathbb{Z}[\sqrt{D}]$ con norma 1.
Sea $\alpha = x + y\,\sqrt{D} \in \mathbb{Z}[\sqrt{D}]$ con $x, y > 0$. En tal caso, $\alpha = x + y\,\sqrt{D} \geq 1 + \sqrt{D} > 1$, por lo que $\alpha > 1$.
Caracterizamos en primer lugar los cuatro elementos distintos de la forma $\pm x \pm y\,\sqrt{D}$, siendo estos $\alpha, \alpha', -\alpha, -\alpha'$, siendo todos ellos solución a la ecuación de Pell $x^2 - Dy^2 = 1$. Como $\alpha > 1$, entonces $-\alpha < -1$. Por otro lado, $N(\alpha) = \alpha\,\alpha' = 1$, luego $\alpha^{-1} = \alpha'$ y nos queda que $\alpha' \in (0, 1)$. Por tanto, $-\alpha' \in (-1, 0)$. Para determinar soluciones de $x^2 - Dy^2 = 1$ con $x, y > 0$, consideramos aquellos $\alpha > 1$ con $\alpha \in \mathbb{Z}[\sqrt{D}]$. De todos los elementos de $R(1)$, hay uno de ellos que es el más pequeño que satisface que es mayor que 1 y con $x, y > 0$.

Definición 1.9. Sea $D \in \mathbb{Z}_{>0}$ libre de cuadrados. Llamamos **solución fundamental** de la ecuacion de Pell (1.1) y lo denotamos como $\epsilon = x_0 + y_0\,\sqrt{D}$ al elemento $\epsilon \in \mathbb{Z}[\sqrt{D}]$ que verifica que $x_0^2 - Dy_0^2 = 1$ y además, cumple que es el más pequeño de $R(1)$ con $x_0, y_0 > 0$.

Proposición 1.10. $R(1)$ tiene estructura de grupo.

Demostración. Sean $\alpha, \beta \in R(1)$. Entonces $N(\alpha\beta) = N(\alpha)\,N(\beta) = 1$, por lo que $\alpha\beta \in R(1)$. Por otro lado, $\alpha^{-1} \in R(1)$ pues hemos visto que si $\alpha \in R(1)$ entonces $\alpha^{-1} = \alpha'$ y $N(\alpha') = N(\alpha^{-1}) = 1$. □

Teorema 1.11. *Sea $D \in \mathbb{Z}_{>0}$ libre de cuadrados. Si $\epsilon = x_0 + y_0\sqrt{D}$ es la solución de la ecuacion de Pell (1.1), entonces todo $\alpha \in R(1)$, es decir, cualquier solución a la ecuación de Pell, tiene una expresión única de la forma:*

$$\alpha = x + y\sqrt{D} = \pm\epsilon^n \quad \text{para algún } n \in \mathbb{Z}. \tag{1.6}$$

En otras palabras, $R(1)$ es un grupo multiplicativo con dos generadores, -1 y ϵ y además, ϵ tiene orden infinito. En particular, $R(1) \simeq \mathbb{Z}$.

Demostración. Sea $\alpha = x + y\sqrt{D}$ solución de la ecuación de Pell $x^2 - Dy^2 = 1$, de manera que $\alpha \in R(1)$ y denotamos como $\epsilon = x_0 + y_0\sqrt{D}$ a la solución fundamental. Consideramos los siguientes cuatro elementos: α, α^{-1}, $-\alpha$ y $-\alpha^{-1}$. Todos ellos son elementos de $R(1)$ por lo que son solución de la ecuación de Pell y solo difieren en el signo de x e y. Teniendo en cuenta la observación 1.8, tan sólo uno de estos cuatro elementos es mayor que 1, que será aquel para el que $x, y > 0$. Por tanto, basta con ver que para todo $\alpha > 1$ tal que $\alpha \in R(1)$ cumple que puede escribirse de la forma $\alpha = \pm\epsilon^n$ para algún $n \in \mathbb{N}$.
Como $\alpha > 1$ y $\epsilon > 1$ y es mínimo (por definición de solución fundamental, pues tomo $\epsilon = x_0 + y_0\sqrt{D}$ tal que $x_0 + y_0\sqrt{D} > 1$ y cumple que es el mínimo valor que verifica (1.1) con esta propiedad), existe algún entero n tal que $\epsilon^n \leq \alpha < \epsilon^{n+1}$.
Veamos que debe ser $\epsilon^n = \alpha$. Supongamos que no, de manera que si $\epsilon^n \neq \alpha$ entonces:

$$\epsilon^n < \alpha < \epsilon^{n+1} \Longrightarrow 1 < \alpha\,\epsilon^{-n} < \epsilon \Longrightarrow\ \alpha\,\epsilon^{-n} > 1. \tag{1.7}$$

Llamo $\lambda = \alpha\epsilon^{-n}$. Dado $\epsilon \in R(1)$, que es un grupo multiplicativo, su inverso ϵ^{-1} también pertenece, y por ende, $\epsilon^{-n} \in R(1)$. En particular, $R(1) \subset \mathbb{Z}[\sqrt{D}]$ luego $\epsilon^{-n} \in \mathbb{Z}[\sqrt{D}]$. Como $\mathbb{Z}[\sqrt{D}]$ es un anillo, el producto de dos elementos del mismo también pertenece al anillo, por lo que $\lambda \in \mathbb{Z}[\sqrt{D}]$. En tal caso, usando que la norma de un elemento de $\mathbb{Z}[\sqrt{D}]$ es multiplicativa:

$$\lambda = \alpha\left(\frac{1}{\epsilon}\right)^n \in \mathbb{Z}[\sqrt{D}] \text{ y además } N(\lambda) = N\left(\frac{\alpha}{\epsilon^n}\right) = \frac{N(\alpha)}{N(\epsilon)^n} = 1.$$

Por tanto, $\lambda \in R(1)$, es decir, λ es solución a la ecuación de Pell. Sin embargo, por (1.7), tenemos que $1 < \lambda < \epsilon$, lo cual es una contradicción por ser ϵ la solución fundamental a la ecuación de Pell. Por tanto, $\lambda = 1$ y $\alpha = \epsilon^n$. □

1.3. Otras ecuaciones importantes

El estudio de las soluciones a otras ecuaciones diofánticas de la forma $x^2 - Dy^2 = z$ (1.2) tiene un papel relevante en el análisis que vamos a realizar en el capítulo 2. Para este análisis, procedemos a caracterizar los conjuntos $R(-1)$, $R(4)$ y $R(-4)$. Es decir, fijado $D > 0$ entero libre de cuadrados, vamos a analizar las ecuaciones diofánticas siguientes:

$$X^2 - DY^2 = -1, \qquad X^2 - DY^2 = 4\sigma,\ \sigma \in \{-1, 1\}. \tag{1.8}$$

La ecuación $x^2 - Dy^2 = -1$ con D entero positivo libre de cuadrados no tiene siempre solución. Si la tiene, se cumple que $x^2 \equiv -1 \pmod{D}$, y si esto es cierto, debe ser $D \equiv 1, 2 \pmod 4$. Para verlo basta con observar que si D es impar y p es un primo que divide a D, entonces se tendrá que $x^2 \equiv -1 \pmod p$ y por la Ley de Reciprocidad Cuadrática, tenemos que $p \equiv 1 \pmod 4$. Así, el producto de todos los primos p que dividen a D da $D \equiv 1 \pmod 4$. Si D es par, $D = 2D'$ y del la misma forma, se tiene que $D' \equiv 1 \pmod 4$. Concluyendo $D \equiv 2 \pmod 4$. Además, a diferencia de $R(1)$, $R(-1)$ no es un grupo, pues el producto de dos elementos de éste pertenecen a $R(1)$, es decir, el producto de dos soluciones de $x^2 - Dy^2 = -1$ es solución de $x^2 - Dy^2 = 1$ debido a que si $\alpha, \beta \in R(-1)$, entonces $N(\alpha), N(\beta) = -1$ y dado que la norma es multiplicativa, $N(\alpha\beta) = N(\alpha)\, N(\beta) = (-1)^2 = 1$, luego $\alpha\beta \in R(1)$.

Teorema 1.12. *Si la ecuación $x^2 - Dy^2 = -1$ con D entero positivo libre de cuadrados tiene solución y denotamos como γ la mínima solución con $x, y > 0$, entonces $\epsilon = \gamma^2$ y todas las soluciones de $x^2 - Dy^2 = -1$ vienen dadas por $\pm\gamma\, \epsilon^n$ para todo $n \in \mathbb{Z}$.*

Demostración. Sea $\gamma = x + y\, \sqrt{D} \in \mathbb{Z}[\sqrt{D}]$ definida en el Teorema 1.12, es decir, γ la mínima solución con $x, y > 0$ de $x^2 - Dy^2 = -1$. Entonces, como $\gamma \in R(-1)$, $N(\gamma) = -1$, luego $(N(\gamma))^2 = 1$ y aplicando la propiedad multiplicativa de la norma, $N(\gamma^2) = (N(\gamma))^2 = 1$, por lo que $\gamma^2 \in R(1)$ y dado que tomo $x, y > 0$, entonces $\gamma > 1$ y por tanto, $\gamma^2 > 1$. Lo que es más, $1 < \epsilon \leq \gamma^2$ por Definición 1.9 de solución fundamental. Por tanto,

$$1 < \epsilon \leq \gamma^2 \implies \gamma^{-1} < \epsilon\, \gamma^{-1} \leq \gamma. \tag{1.9}$$

Como por la Observación 1.8 sabemos que $\frac{1}{\gamma} = -\gamma'$, podemos deducir de (1.16) que $-\gamma' < -\epsilon\, \gamma' \leq \gamma$. Si llamamos $\lambda = -\epsilon\, \gamma' \in \mathbb{Z}[\sqrt{D}]$ (pues es el producto de elementos del grupo multiplicativo) entonces usando que la norma es multiplicativa, tenemos que $N(\lambda) = N(-\epsilon\, \gamma') = N(-1)\, N(\epsilon)\, N(\gamma') = -1$, por lo que no puede ser $\lambda = 1$.
Fijándonos en (1.16), $\gamma^{-1} < \lambda \leq \gamma$, teniendo en cuenta que $\lambda \neq 1$ y que γ es la mínima solución con componentes positivas y por tanto, $\gamma > 1$, tenemos que o bien $\gamma^{-1} < \lambda < 1$ o bien $1 < \lambda \leq \gamma$. La primera desigualdad no es posible, pues:

$$\gamma^{-1} < \lambda \implies \frac{1}{\lambda} < \gamma; \qquad \lambda < 1 \implies 1 < \frac{1}{\lambda}.$$

Lo cual es una contradicción porque teniendo en cuenta la Observación 1.8, $\lambda^{-1} = -\lambda'$ es también solución de $x^2 - D\, y^2 = -1$, y por definición de γ, que es la mínima solución con $x, y > 0$ de dicha ecuación, no puede darse el caso en que $1 < \frac{1}{\lambda} < \gamma$, pues tendríamos una solución positiva menor que γ. Fijándonos en la segunda desigualdad, tampoco puede ser que $1 < \lambda < \gamma$ por la misma razón, de manera que necesariamente, $\lambda = \gamma$. Por tanto, nos queda que $\gamma = \lambda = \epsilon\, \gamma^{-1}$, por lo que $\epsilon = \gamma^2$.
Sea $\beta = x_1 + y_1\, \sqrt{D}$ otra solución de $x^2 - D\, y^2 = -1$. Nos restringimos al caso en el que $\beta > 1$, es decir, tomamos sus componentes x_1, y_1 positivas. Dado que $\beta > 1$ y $\epsilon > 1$, debe existir un n para el que $\epsilon^n \leq \beta < \epsilon^{n+1}$, por lo que $1 \leq \beta\, \epsilon^{-n} < \epsilon = \gamma^2$. Dividiendo entre γ, nos queda que:

$$\gamma^{-1} \leq \beta\, \epsilon^{-n}\, \gamma^{-1} < \gamma.$$

Debido a que γ es la mínima solución con $x, y > 0$ de dicha ecuación, debe ser $\beta\epsilon^{-n}\gamma^{-1} = 1$, y por tanto, teniendo en cuenta que $\epsilon = \gamma^2$, nos queda que:

$$\beta\epsilon^{-n}\gamma^{-1} = 1 \implies \beta = \epsilon^n\gamma^n = \gamma^{2n+1} = \gamma^{2n}\gamma = \pm\epsilon^n\gamma.$$

□

Consideramos la ecuación diofántica siguiente:

$$X^2 - DY^2 = 4\sigma,\ \sigma \in \{-1, 1\} \quad D > 0. \tag{1.10}$$

Observación 1.13. Hagamos una observación previa: fijado D entero positivo libre de cuadrados, tomamos $\beta = a + b\sqrt{D} \in \mathbb{Z}[\sqrt{D}]$.

- Si β tiene $N(\beta) = 1$, que sabemos que tal elemento existe, pues basta tomar cualquier elemento de $R(1) \simeq \mathbb{Z}$, entonces dado que la norma es multiplicativa, $N(2\beta) = N(2)\ N(\beta) = 2^2 = 4$, es decir, se cumple que $a^2 - Db^2 = 4$, por lo que la ecuación $X^2 - DY^2 = 4$ tiene siempre solución.
- Si para tal D la ecuación $x^2 - Dy^2 = -1$ tiene solución y tomamos β tal que $N(\beta) = -1$, que sabemos que existe por el resultado del Teorema 1.12, entonces dado que la norma es multiplicativa, $N(2\beta) = N(2)\ N(\beta) = -2^2 = -4$, es decir, se cumple que $a^2 - Db^2 = -4$, por lo que queda probado que la ecuación $X^2 - DY^2 = -4$ tiene solución.

Denotamos como (x, y, σ) solución entera de (1.10).

Lema 1.14. *Si (x_1, y_1, σ_1) y (x_2, y_2, σ_2) son soluciones de (1.10) donde $x_1 \neq \mu x_2$ e $y_1 \neq -\mu y_2$ con $\mu \in \{-1, 1\}$ entonces (x_3, y_3, σ_3) es una solución de (1.10) donde:*

$$x_3 = \frac{x_1x_2 + Dy_1y_2}{2}, \quad y_3 = \frac{x_1y_2 + x_2y_1}{2}, \quad \sigma_3 = \sigma_1\sigma_2.$$

Si definimos $\lambda_1 = \frac{x_1+y_1\sqrt{D}}{2}$ y $\lambda_2 = \frac{x_2+y_2\sqrt{D}}{2}$, tenemos que $\lambda_3 = \lambda_1\lambda_2 = \frac{x_3+y_3\sqrt{D}}{2}$.
En particular, si denotamos por (x_0, y_0, σ_0) a la menor solución de (1.10) con x_0, y_0 positivos y definimos $\lambda = \frac{x_0+y_0\sqrt{D}}{2}$, podemos producir una infinitud de soluciones de la misma (x_n, y_n, σ_0^n), $\quad n = 1, 2, 3\ldots$, donde

$$\lambda^n = \frac{x_n + y_n\sqrt{D}}{2}.$$

Demostración. Sean (x_1, y_1, σ_1) y (x_2, y_2, σ_2) soluciones a (1.10).
Entonces $x_1^2 - Dy_1^2 = 4\sigma_1$ y $x_2^2 - Dy_2^2 = 4\sigma_2$. Multiplicando ambas y desarrollando nos queda que: $(x_1^2 - Dy_1^2)\ (x_2^2 - Dy_2^2) = (x_1x_2)^2 + (Dy_1y_2)^2 - D\ \big((x_1y_2)^2 + (x_2y_1)^2\big)$.
Desarrollando la parte derecha de la igualdad y reagrupando y teniendo en cuenta que el producto de la izquierda es $16\sigma_1\sigma_2$, nos queda que:

$$\Big(\underbrace{\frac{x_1x_2 + Dy_1y_2}{2}}_{x_3}\Big)^2 - D\Big(\underbrace{\frac{x_1y_2 + x_2y_1}{2}}_{y_3}\Big)^2 = 4\underbrace{\sigma_1\sigma_2}_{\sigma_3}. \tag{1.11}$$

De manera que (x_3, y_3, σ_3) es solución de (1.10). Además, $y_3 \neq 0$ pues si fuese $y_3 = 0$ entonces

$$y_3 = \frac{x_1y_2 + x_2y_1}{2} = 0 \Longrightarrow x_1 = -\frac{x_2y_1}{y_2}.$$

En tal caso, si $y_3 = 0$ nos queda que $x_3^2 = 4\sigma_3$ de manera que $x_3 = \pm 2$. Si llamamos $\mu = \frac{x_1}{x_2}$ entonces $-\mu = \frac{y_1}{y_2}$ y usando que $x_3 = \pm 2$ vemos que

$$x_3 = \frac{x_1x_2 + Dy_1y_2}{2} = \pm 2; \quad x_1x_2 + Dy_1y_2 = \pm 4.$$

Sustituyendo por $x_1 = \mu x_2$ e $y_1 = -\mu y_2$:

$$\mu\,(x_2^2 - Dy_2^2) = \pm 4.$$

Como $x_2^2 - Dy_2^2 = 4\sigma_2$ entonces $\mu = \pm 1$, caso que habíamos excluido. Por tanto, vemos que el producto de dos soluciones de (1.10) da por resultado otra solucion de la misma distinta a ellas y no trivial. Por tanto, si tomamos λ descrita como en el enunciado y realizamos n veces el producto consigo misma, obtenemos en cada producto una solución diferente de (1.10). Conviene observar que potencias distintas de λ producen distintas soluciones, pues supongamos que $(x_i, y_i, \sigma_i) = (x_j, y_j, \sigma_j)$ para $i > j$, entonces $\lambda_1^i = \lambda_1^j$, lo cual implica que $\lambda_1^{i-j} = 1$ y esto significa que $y_{i-j} = 0$, caso que excluimos. Luego para índices distintos, la solución no puede ser igual. □

Veamos cómo generar todas las posibles soluciones de $x^2 - Dy^2 = 4$.

Teorema 1.15. *Sea $\xi = x_0 + y_0\sqrt{D} \in \mathbb{Z}[\sqrt{D}]$ la mínima solución con x_0, y_0 positivos, de la ecuación $x^2 - Dy^2 = 4$. Entonces toda solución $\alpha = x' + y'\sqrt{D}$ denotada por $(x', y', 1)$ de $x^2 - Dy^2 = 4$ satisface la siguiente igualdad:*

$$\frac{\alpha}{2} = \pm\left(\frac{\xi}{2}\right)^n \quad \textit{para algún } n \in \mathbb{Z}. \tag{1.12}$$

Observación 1.16. Observamos que si $\alpha = x + y\sqrt{D} \in \mathbb{Z}[\sqrt{D}]$ una solución de la ecuación $x^2 - Dy^2 = 4$, deben ser $x \equiv y \pmod 2$, pues si no fuese así, no cumplirían que $x^2 \equiv Dy^2 \pmod 4$. Si x es par e y impar, tendríamos que $x^2 \equiv 0 \pmod 4$ e $y^2 \equiv 1 \pmod 4$. Por tanto, debería ser $D \equiv 0 \pmod 4$, pero D es libre de cuadrados, luego no es posible. Si y es par y x impar entonces la contradicción es inmediata, pues tendríamos que $x^2 \equiv 1 \pmod 4$ e $y^2 \equiv 0 \pmod 4$, contrario a $x^2 \equiv Dy^2 \pmod 4$.

Lema 1.17. *Si (x, y, σ) es una solución de (1.10), entonces $x + y\sqrt{D} > 2$ si y solo si $x > 0, y > 0$.*

Demostración. Si $x, y > 0$, entonces $x + y\sqrt{D} > 1 + \sqrt{D} > 2$ por ser D entero positivo libre de cuadrados. Supongamos que $x + y\sqrt{D} > 2$. Como (x, y, σ) es una solución de (1.10), se cumple que $(x + y\sqrt{D})(x - y\sqrt{D}) = 4\sigma$ de donde obtenemos que:

$$\frac{|\, x - y\sqrt{D}\,|}{2} = \frac{2}{(x + y\sqrt{D})} < 1.$$

Por tanto, $-2 < x - y\sqrt{D} < 2$ y dado que $x + y\sqrt{D} > 2$, debe ser $x, y > 0$, pues sumando ambas desigualdades tenemos que $2x > 2-2 = 0$, luego $x > 0$. Por otro lado, restando $2 < x + y\sqrt{D}$ y $-2 < x - y\sqrt{D} < 2$ nos queda que $-2 < -y\sqrt{D} < -1$, y por tanto, $y\sqrt{D} > 1$ y dado que $\sqrt{D} > 0$, concluimos que $y > 0$. □

Observación 1.18. Atendiendo al Lema 1.17, observamos que si $x, y > 0$, entonces $\alpha = x + y\sqrt{D} > 2$, por lo que $\frac{\alpha}{2} > 1$. En tal caso, $-\alpha < -2$, luego $\frac{-\alpha}{2} < -1$. Por otro lado, $0 < \frac{1}{\alpha} < \frac{1}{2}$ luego $\frac{2}{\alpha} \in (0, 1)$ y por último, nos queda que $\frac{2}{-\alpha} \in (-1, 0)$.

Demostración del Teorema 1.15. Sea $\xi = x_0 + y_0\sqrt{D} \in \mathbb{Z}[\sqrt{D}]$ la mínima solución de la ecuación $x^2 - Dy^2 = 4$ con x_0, y_0 positivos, es decir, $\xi = (x_0, y_0, 1)$ y llamamos α al elemento de la forma $x' + y'\sqrt{D} \in \mathbb{Z}[\sqrt{D}]$ tal que $(x', y', 1)$ es una solución de $x^2 - Dy^2 = 4$. En este caso, $N(\alpha) = (x' + y'\sqrt{D})(x' - y'\sqrt{D}) = (x')^2 - D(y')^2 = 4$ de manera que $\left(\frac{x'+y'\sqrt{D}}{2}\right)\left(\frac{x'-y'\sqrt{D}}{2}\right) = 1$. Atendiendo al Lema 1.17 y Observación 1.18, afirmamos que tan solo uno de estos cuatro es mayor que 1:

$$\frac{\alpha}{2} = \frac{x' + y'\sqrt{D}}{2}, \qquad \left(\frac{\alpha}{2}\right)^{-1} = \frac{x' - y'\sqrt{D}}{2},$$
$$\frac{-\alpha}{2} = \frac{-x' - y'\sqrt{D}}{2}, \qquad \left(\frac{-\alpha}{2}\right)^{-1} = \frac{-x' + y'\sqrt{D}}{2}.$$

Denoto a este como $\frac{\gamma}{2} = \frac{|x'|+|y'|\sqrt{D}}{2}$. Como $\frac{\gamma}{2} > 1$ y $\frac{\xi}{2} > 1$, existe algún entero n no negativo tal que $\left(\frac{\xi}{2}\right)^n \leq \frac{\gamma}{2} < \left(\frac{\xi}{2}\right)^{n+1}$.
Si fuese $\left(\frac{\xi}{2}\right)^n = \frac{\gamma}{2}$ habríamos terminado porque en tal caso, $n \neq 0$ y tendríamos que:

$$\left(\frac{\xi}{2}\right)^n = \frac{\gamma}{2} \in \left\{\frac{\alpha}{2}, \left(\frac{\alpha}{2}\right)^{-1}, \frac{-\alpha}{2}, \left(\frac{-\alpha}{2}\right)^{-1}\right\}.$$

Esto implica que $\frac{\alpha}{2} = \pm\left(\frac{\xi}{2}\right)^m$ para algún $m \in \mathbb{Z}$ como queríamos probar. Si $\left(\frac{\xi}{2}\right)^n \neq \frac{\gamma}{2}$ entonces:
(1.13)

$$\left(\frac{\xi}{2}\right)^n < \frac{\gamma}{2} < \left(\frac{\xi}{2}\right)^{n+1} \Longrightarrow 1 < \left(\frac{\gamma}{2}\right)\left(\frac{\xi}{2}\right)^{-n} < \frac{\xi}{2} \Longrightarrow \lambda = \left(\frac{\gamma}{2}\right)\left(\frac{\xi}{2}\right)^{-n} > 1.$$

Como ξ es solución de (1.10) se cumple que:

$$\frac{\xi}{2}\left(\frac{x_0 - y_0\sqrt{D}}{2}\right) = 1 \Longleftrightarrow \left(\frac{\xi}{2}\right)^n \left(\frac{x_0 - y_0\sqrt{D}}{2}\right)^n = 1 \Longleftrightarrow \left(\frac{\xi}{2}\right)^{-n} = \left(\frac{x_0 - y_0\sqrt{D}}{2}\right)^n.$$

Como $\xi = (x_0, y_0, 1)$ es solución de (1.10), entonces $(x_0, -y_0, 1)$ también lo es y por el Lema 1.14, habríamos construidos un nuevo λ de la forma:

$$\lambda = \frac{\beta}{2} = \left(\frac{\gamma}{2}\right)\left(\frac{\xi}{2}\right)^{-n} = \frac{x_2 + y_2\sqrt{D}}{2} \quad \text{para algún } x_2, y_2 \in \mathbb{Z} \text{ con } x_2 \equiv y_2 \pmod 2.$$

Por la Observación 1.16, $x_2 \equiv y_2 \pmod 2$ y además por el Lema 1.17 $x_2, y_2 > 0$. Por tanto, $\beta = x_2 + y_2\sqrt{D}$ es solución de $x^2 - Dy^2 = 4$. Sin embargo, por (1.13), tendríamos que $1 < \lambda = \frac{\beta}{2} < \frac{\xi}{2}$, pero por la elección de ξ esto es una contradicción, luego no puede ser $\left(\frac{\xi}{2}\right)^n \neq \frac{\gamma}{2}$. □

Teorema 1.19. *Si la ecuación $x^2 - y^2 D = -4$ tiene solución, entonces si denotamos como μ a su solución mínima con componentes positivos y por ξ a la ya definida en el teorema anterior, entonces $\frac{\xi}{2} = \left(\frac{\mu}{2}\right)^2$ y toda solución general de dicha ecuación viene dada por*

$$\frac{\alpha}{2} = \pm \frac{\mu}{2} \left(\frac{\xi}{2}\right)^n, \; n \in \mathbb{Z}.$$

Demostración. Por la Observación 1.16, toda solución de $x^2 - Dy^2 = 4$ cumple que $x \equiv y \pmod 2$. Escribimos toda solución de la forma $x + y\sqrt{D} \equiv a(1 + \sqrt{D}) \pmod 2$ donde $a = 0, 1$, será 0 cuando x e y sean pares y 1 cuando sean impares. En este último caso, se tiene que $x^2 \equiv 1 \equiv Dy^2 \equiv D \pmod 4$, luego $D \equiv 1 \pmod 4$ y por tanto D es impar. Sean α y β dos soluciones de $x^2 - Dy^2 = 4$. Con esta notación, las escribimos como $\alpha \equiv a\,(1 + \sqrt{D}) \pmod 2$, $\beta \equiv b\,(1 + \sqrt{D}) \pmod 2$ de manera que

$$\alpha\beta \equiv ab\,(1 + \sqrt{D})^2 \pmod 2 \equiv ab\,(1 + D) \pmod 2. \tag{1.14}$$

Si $ab = 1$, observando (1.14) se tiene $\alpha\beta \equiv 1 + D \equiv 0 \pmod 2$, ya que D es impar. Si $ab = 0$, entonces $\alpha\beta \equiv 0 \pmod 2$. Por tanto, para cualquier par de soluciones de $x^2 - Dy^2 = 4$ se cumple que:

$$\frac{\alpha\beta}{2} = 2\,\frac{\alpha}{2}\,\frac{\beta}{2} \in \mathbb{Z} \quad \text{y además } N\left(\frac{\alpha\beta}{2}\right) = \frac{N(\alpha)N(\beta)}{N(2)} = \frac{4 \cdot 4}{2^2} = 4. \tag{1.15}$$

Luego todos los elementos de la forma $\alpha\beta/2$ son solución a $x^2 - Dy^2 = 4$. Siguiendo la demostración del Teorema 1.11 queda probado que toda solución de $x^2 - Dy^2 = 4$ es de la forma que hemos construido. Sea $\mu = x + y\sqrt{D} \in \mathbb{Z}[\sqrt{D}]$ la solución fundamental de $x^2 - Dy^2 = -4$, es decir, μ la mínima solución con $x, y > 0$ de $x^2 - Dy^2 = -4$. Entonces $N(\mu) = -4$, y por tanto, $N(\frac{\mu}{2}) = -1$ por lo que $\frac{\mu}{2} \in R(-1)$ y como μ es la solución fundamental de $x^2 - Dy^2 = -4$, $\mu/2$ lo será de $x^2 - Dy^2 = -1$. Aplicando la propiedad multiplicativa de la norma, $N(\left(\frac{\mu}{2}\right)^2) = (N(\frac{\mu}{2}))^2 = 1$, por lo que $\left(\frac{\mu}{2}\right)^2 \in R(1)$ y dado que tomo $x, y > 0$, entonces por el Lema 1.17 $\mu > 2$ y en consecuencia, $\frac{\mu}{2} > 1$ por lo que $\left(\frac{\mu}{2}\right)^2 > 1$. Llamando ξ a la solución fundamental de $x^2 - Dy^2 = 4$, tenemos que $\frac{\xi}{2}$ es la solución fundamental de $x^2 - Dy^2 = 1$, por lo tanto $\xi/2 \in R(1)$. Lo que es más, $1 < \frac{\xi}{2} \leq \left(\frac{\mu}{2}\right)^2$ por definición de solución fundamental. De hecho se tiene $\frac{\xi}{2} = \left(\frac{\mu}{2}\right)^2$. Ya que de lo contrario se tendría

$$1 < \frac{\xi}{2} < \left(\frac{\mu}{2}\right)^2 \implies \left(\frac{\mu}{2}\right)^{-1} < \frac{\xi}{2}\left(\frac{\mu}{2}\right)^{-1} < \frac{\mu}{2}. \tag{1.16}$$

que es una contradicción al hecho de que $\frac{\mu}{2}$ es solucíon fundamental de $x^2 - y^2 = -1$. A partir de aquí se procede igual que en la demostración del Teorema 1.12 para concluir la demostración de este resultado. □

CAPÍTULO 2

Cuerpos cuadráticos y ecuaciones de Pell

Para demostrar la existencia de infinitas soluciones a la ecuación de Pell para un cierto $D > 0$ entero libre de cuadrados, hemos visto que conviene factorizar de la forma $x^2 - Dy^2 = (x + \sqrt{D}\, y)(x - \sqrt{D}\, y) = 1$, por lo que que encontrar soluciones a la ecuación de Pell es equivalente a encontrar elementos de $\mathbb{Z}[\sqrt{D}]$ con norma 1. Si consideramos el grupo multiplicativo de las unidades de $\mathbb{Z}[\sqrt{D}]$ formado por los elementos con normas 1, o -1, por el capítulo anterior sabemos que tal grupo tiene infinitos elementos y todos ellos pueden obtenerse como potencia de lo que conocemos como unidad fundamental. En este capítulo vamos a generalizar este hecho, introduciendo conceptos de Teoría Algebraica de Números con el fin de caracterizar el grupo de unidades del anillo de enteros un cuerpo cuadrático, tanto real como imaginario, para lo que vamos a necesitar conocer las soluciones de las ecuaciones $x^2 - Dy^2 = \pm 1, \pm 4$.

2.1. Cuerpos cuadráticos

Procedemos a caracterizar la estructura del anillo de enteros $\mathcal{O}_K$ de un cuerpo cuadrático K. En el Apéndice B se recogen definiciones y resultados necesarios para el desarrollo y entendimiento de esta sección.

Observación 2.1. Sea $\alpha \in \mathbb{C}$ un entero algebraico de grado dos. Entonces, todo cuerpo de números cuadrático $K = \mathbb{Q}(\alpha)$ puede escribirse de la forma $\mathbb{Q}(\sqrt{D_0})$, donde D_0 es libre de cuadrados. La demostración se añade en el Apéndice B.

Procedemos a caracterizar la estructura del anillo de enteros de un cuerpo cuadrático $K = \mathbb{Q}(\sqrt{D_0})$. Definimos:

$$r = \begin{cases} 1 & \text{cuando} \quad D_0 \not\equiv 1 \pmod 4, \\ 2 & \text{cuando} \quad D_0 \equiv 1 \pmod 4, \end{cases} \qquad \omega_0 = \frac{r-1+\sqrt{D_0}}{r}.$$

Teorema 2.2. $\mathcal{O}_K = \mathbb{Z}[\omega_0] = \begin{cases} \mathbb{Z}[\sqrt{D_0}] & \textit{cuando} \quad D_0 \not\equiv 1 \pmod 4, \\ \mathbb{Z}[\frac{1+\sqrt{D_0}}{2}] & \textit{cuando} \quad D_0 \equiv 1 \pmod 4. \end{cases}$

Observación 2.3. En particular, si $\beta \in \mathcal{O}_K$ se tiene que $\beta = x + y\omega_0$, con $x, y \in \mathbb{Z}$. Además si $D_0 \equiv 1 \pmod 4$ entonces $x \equiv y \pmod 2$.

Observación 2.4. Observamos que $T(\omega_0),\ N(\omega_0) \in \mathbb{Z}$, pues $D_0 \in \mathbb{Z}$ y teniendo en cuenta los posibles valores de r:

$$T(\omega_0) = \omega_0 + \omega_0' = \tfrac{2\,(r-1)}{r} \in \{0, 1\}, \quad N(\omega_0) = \omega_0 \cdot \omega_0' = \tfrac{(r-1)^2 - D_0}{r^2} \in \left\{-D_0,\ \tfrac{1-D_0}{2}\right\}.$$

Demostración Teorema 2.2. Si $\beta = x + y\,\omega_0$, entonces, atendiendo a la definición de ω_0 se tiene que: $T(\beta) = 2x + y\,T(\omega_0) \in \mathbb{Z}$. Además, $N(\beta) = x^2 + xy\,T(\omega_0) + y^2 N(\omega_0) \in \mathbb{Z}$. Con cálculos directos vemos que: $\beta^2 = T(\beta)\,\beta - N(\beta)$ y por tanto, $\beta \in \mathcal{O}_K$, pues su polinomio mínimo es $x^2 - T(\beta)x + N(\beta) \in \mathbb{Z}[x]$, ya que $N(\beta), T(\beta) \in \mathbb{Z}$.

Sea $\beta \in \mathcal{O}_K$ con $K = \mathbb{Q}(\sqrt{D_0})$. Entonces $\beta = \frac{c_1 + c_2\sqrt{D_0}}{c_3} \in K$ con $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{Z}$, $c_3 \neq 0$. Asumimos sin pérdida de generalidad que $(c_1, c_2, c_3) = 1$.

Como $\beta \in \mathcal{O}_K$, aplicando la Proposición B.12 del Apéndice B, $T(\beta) = \frac{2\,c_1}{c_3} \in \mathbb{Z}$ y $N(\beta) = \frac{c_1^2 - c_2^2 D_0}{c_3^2} \in \mathbb{Z}$.

Veamos que debe ser $(c_1, c_3) = 1$. Supongamos que existe algún primo $p \in \mathbb{Z}$ tal que $p \mid c_1,\ c_3$. Entonces $p^2 \mid c_1^2,\ c_3^2$. Reescribiendo la expresión de la $N(\beta)$ tenemos que $N(\beta) \cdot c_3^2 - c_1^2 = -c_2^2\ D_0 \in \mathbb{Z}$. Por tanto, $p^2 \mid N(\beta)\ c_3^2 - c_1^2 = -c_2^2\ D_0$ y como D_0 es libre de cuadrados, debería ser $p^2 \mid c_2^2$ y en consecuencia, $p \mid c_2$. Pero esto es una contradicción, pues tendríamos que entonces $(c_1, c_2, c_3) = p$. Por tanto, $(c_1, c_3) = 1$.

Como $T(\beta) = \frac{2\,c_1}{c_3} \in \mathbb{Z}$ y $(c_1, c_3) = 1$, $c_3 \mid 2$ y como partíamos de que $c_3 > 0$, hay dos posibles subcasos:

- Si $\mathbf{c_3 = 2}$, tenemos que $\beta = \frac{c_1 + c_2\sqrt{D_0}}{2}$ y $N(\beta) = \frac{c_1^2 - c_2^2 D_0}{4} \in \mathbb{Z}$, entonces $4 \mid c_1^2 - c_2^2\ D_0$ y por tanto,

  $$c_1^2 \equiv c_2^2\ D_0 \pmod 4. \tag{2.1}$$

  Si $2 \mid c_2$, entonces por (2.1), $2 \mid c_1$ y por tanto tendríamos que $(c_1, c_2, c_3) = 2$, lo cual es una contradicción, por lo que c_1, c_2 son ambos impares. Por lo tanto, debe ser $c_1^2 \equiv c_2^2 \equiv 1 \pmod 4$, por lo que por (2.1) $D_0 \equiv 1 \pmod 4$ y entonces $\omega_0 = \frac{1+\sqrt{D_0}}{2}$. Por tanto, nos queda que $\beta = \frac{c_1 + c_2\sqrt{D_0}}{2}$ con $c_1 \equiv c_2 \equiv 1 \pmod 2$ y $D_0 \equiv 1 \pmod 4$ por lo que:

  $$\beta = \frac{c_1 - c_2}{2} + c_2\left(\frac{1 + \sqrt{D_0}}{2}\right) = x + y\,\omega_0 \quad \text{donde} \quad x = \frac{c_1 - c_2}{2} \in \mathbb{Z}, \quad y = c_2 \in \mathbb{Z}.$$

  Observamos que tanto x como y son enteros puesto que $c_2 \in \mathbb{Z}$ y x es la resta de dos impares, por lo que es par, y dividido entre 2 es un entero impar. Por tanto, $x \equiv y \equiv 1 \pmod 2$.

- Si $\mathbf{c_3 = 1}$, tenemos que:

  $$\beta = \begin{cases} c_1 + c_2\sqrt{D_0} = x + y\,\omega_0 & \text{cuando} \quad D_0 \not\equiv 1 \pmod 4, \\ c_1 - c_2 + 2\,c_2\left(\frac{1+\sqrt{D_0}}{2}\right) = x + y\,\omega_0 & \text{cuando} \quad D_0 \equiv 1 \pmod 4. \end{cases}$$

En ambos casos, tanto x como y son enteros por ser suma y resta de enteros. Además, en el caso en el que $D_0 \equiv 1 \pmod 4$, tenemos que x es resta de impares, por lo que es par e $y = 2c_2$, por lo que también se cumple que $x \equiv y \pmod 2$.

Con esto queda probado el Teorema de la estructura del anillo de enteros de un cuerpo cuadrático. □

2.2. Teorema de las Unidades de Dirichlet

Sea α una unidad del anillo de enteros de $\mathbb{Q}(\sqrt{D_0})$. En tal caso, existe $\beta \in \mathcal{O}_K$ tal que $\alpha\beta = 1$. Tomando normas: $N(\alpha)N(\beta) = 1$ donde $N(\alpha), N(\beta) \in \mathbb{Z}$ por ser $\alpha, \beta \in \mathcal{O}_K$, luego tendrá que ser $N(\alpha) = \pm 1$. Por tanto, el conjunto de unidades de $\mathcal{O}_K$ con K cuerpo cuadrático, se caracteriza de la siguiente forma:

1. Si $D_0 \not\equiv 1 \pmod 4$, entonces $\mathcal{O}_K = \mathbb{Z}[\sqrt{D_0}]$, luego las unidades de $\mathcal{O}_K$ son los elementos $\alpha = a + b\sqrt{D_0}$ tales que $N(\alpha) = \alpha\alpha' = a^2 - D_0\, b^2 = \pm 1$.

2. Si $D_0 \equiv 1 \pmod 4$, entonces dado que en este caso $\omega_0 = \frac{1+\sqrt{D_0}}{2}$, $\mathcal{O}_K = \mathbb{Z}[\frac{1+\sqrt{D_0}}{2}]$ y las unidades de $\mathcal{O}_K$ son los elementos $\alpha = a + b\ \omega_0$ con $a \equiv b \pmod 2$ tales que $N(\alpha) = \alpha\alpha' = (a + b\,\omega_0)\ (a + b\,\omega_0) = \pm 1$. Desarrollando, tenemos $(2a + b)^2 - b^2\ D_0 = \pm 4$. Tomando $x = 2a + b$, $y = b$, observamos que encontrar las unidades de $\mathcal{O}_K$ es equivalente a encontrar las soluciones de la ecuación $x^2 - Dy^2 = \pm 4$, pues toda unidad de $\mathcal{O}_K$ satisface dicha ecuación y además, toda solución de dicha ecuación es una unidad de $\mathcal{O}_K$ dado que $D_0 \equiv 1 \pmod 4$, luego si (x, y) satisface $x^2 - D_0\, y^2 = \pm 4$, en particular, $x \equiv y \pmod 2$.

En el caso de cuerpos cuadráticos reales, $D_0 > 0$, encontrar las unidades de $\mathcal{O}_K$ es equivalente a encontrar las soluciones a las ecuaciones de Pell $x^2 - D_0\, y^2 = \pm 1, \pm 4$, las cuales hemos visto que, en el caso de tener solución, son infinitas y se pueden expresar como potencia de la solución fundamental. Con esto queda probado el siguiente teorema, conocido como Teorema de las Unidades Dirichlet para el caso de cuerpos cuadráticos real.

Teorema 2.5 (**Teorema de las Unidades Dirichlet para el caso de cuerpos cuadráticos reales).** *El grupo de unidades del anillo de enteros de un cuerpo cuadrático real es un grupo infinito generado por dos generadores,* -1 *y la solución fundamental de una de las siguientes ecuaciones de Pell: si* $D \equiv 1 \pmod 4$*, tomamos la solución fundamental de* $x^2 - Dy^2 = 4$*, si* $D \not\equiv 1 \pmod 4$*, la de* $x^2 - Dy^2 = 1$.

Observación 2.6. Observamos que el conjunto de unidades de $\mathbb{Z}[\sqrt{D_0}]$ con D_0 entero positivo libre de cuadrados, es el conjunto infinito de la forma $\{\pm\epsilon^n : n \in \mathbb{Z}\}$ y donde $\epsilon = x_0 + y_0\sqrt{D_0}$ es el mínimo elemento con $x_0, y_0 > 0$. Llamaremos a tal elemento **unidad fundamental** de $\mathbb{Z}[\sqrt{D_0}]$.

En el caso de cuerpos cuadráticos imaginarios, $D_0 < 0$. Encontrar las unidades de $\mathcal{O}_K$ en este caso supone el estudio de las soluciones de $x^2 - D_0\, y^2 = 1, 4$, debido a que la parte izquierda de la igualdad solo puede tomar valores positivos. Así, el grupo de unidades de $\mathcal{O}_K$ para el caso imaginario queda caracterizado de la siguiente manera:

Teorema 2.7 (**Teorema de las Unidades Dirichlet para el caso de cuerpos cuadráticos imaginarios).** *El grupo de unidades del anillo de enteros de un cuerpo cuadrático imaginario es un grupo cíclico finito generado por una raíz de la unidad. Dado un cuerpo de números cuadrático $K = \mathbb{Q}(\sqrt{D_0})$ con $D_0 < 0$ libre de cuadrados, el grupo de la unidades de $\mathcal{O}_K$ es:*

1. *Si $D_0 = -1$,las unidades de $\mathcal{O}_K$ son $\{\pm 1, \pm i\}$.*
2. *Si $D_0 = -3$, las unidades de $\mathcal{O}_K$ son $\{\pm 1, \frac{\pm 1 \pm \sqrt{-3}}{2}\}$.*
3. *Si $D_0 < -3$, las unidades de $\mathcal{O}_K$ son $\{\pm 1\}$.*

Demostración. Para esta demostración, distinguimos casos:

- $D_0 = -1$. Como $-1 \not\equiv 1 \pmod 4$, entonces $\mathcal{O}_K = \mathbb{Z}[D_0]$, por tanto, la ecuación a resolver es $a^2 + b^2 = 1$, cuyas únicas soluciones enteras son $\{a = \pm 1, b = 0\}$ y $\{a = 0, b = \pm 1\}$. De manera que las unidades de $\mathcal{O}_K$ son $\{\pm 1, \pm i\}$.

- $D_0 = -3$. Dado que $-3 \equiv 1 \pmod 4$, $\mathcal{O}_K = \mathbb{Z}[\frac{1+\sqrt{-3}}{2}]$ Sea $\alpha = \frac{a+b\sqrt{-3}}{2}$ con $a, b \in \mathbb{Z}$ un elemento de $\mathcal{O}_K$. Entonces

$$N(\alpha) = \left(\frac{a + b\sqrt{-3}}{2}\right)\left(\frac{a - b\sqrt{-3}}{2}\right) = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + 3\left(\frac{b}{2}\right)^2 = 1.$$

  Con esto, $N(\alpha) = 1$ si y solo si $a^2 + 3b^2 = 4$ con $a, b \in \mathbb{Z}$. Si $b = 0$ nos queda $a^2 = 4$ y en consecuencia, $a = \pm 2$. Si $|b| = 1$, entonces la ecuación se reduce a resolver $a^2 + 3 = 4$, cuya solución es $a = \pm 1$. Por último, si $|b| > 1$, entonces $a^2 + 3b^2 > a^2 + 3 \geq 4$, luego no hay soluciones enteras para este caso. De manera que las posibles unidades de $\mathcal{O}_K$ son:

$$\{a = \pm 2, b = 0\} \Leftrightarrow \alpha = \{\pm 1\}, \qquad \{a = \pm 1, b = \pm 1\} \Leftrightarrow \alpha = \left\{\frac{\pm 1 \pm \sqrt{-3}}{2}\right\}.$$

- $D_0 < -3$. Si $D_0 \not\equiv 1 \pmod 4$, entonces $\mathcal{O}_K = Z[\sqrt{D_0}]$ por lo que buscamos soluciones enteras de la ecuación $a^2 - D_0\, b^2 = 1$ con $D_0 < -3$. Cuando $b = 0$, obtenemos la solución $a = \pm 1$, mientras que si $|b| \geq 1$, $a^2 - D_0\, b^2 \geq a^2 - D_0 > 1$ porque $D_0 < -3$, luego no tenemos soluciones enteras para este caso.
  Si $D_0 \equiv 1 \pmod 4$ entonces $\mathcal{O}_K = \mathbb{Z}[\frac{1+\sqrt{D_0}}{2}]$. Busco las soluciones enteras a la ecuación $a^2 - D_0\, b^2 = 4$. Si $b = 0$, entonces $a = \pm 1$. Si $|b| \geq 1$, entonces $a^2 - D_0\, b^2 \geq a^2 - D_0 > 4$ porque $D_0 < -3$, luego no hay soluciones enteras en este caso. Concluimos que cuando $D_0 < -3$, el conjunto de unidades de $\mathcal{O}_K$ es $\{\pm 1\}$.

□

CAPÍTULO 3
Fracciones continuas

Los distintos métodos que conocemos para resolver la ecuación de Pell $x^2 - Dy^2 = 1$ se unifican en las fracciones continuas, las cuales permiten una representación de los números reales ligada a sus propiedades algebraicas. A lo largo del capítulo, desarrollaremos algunas de las propiedades estándar de las mismas y caracterizaremos los números cuadráticos como aquellos cuya fracción continua es periódica, resultado recogido en el Teorema de Lagrange. Finalmente, implementaremos el uso de fracciones continuas como herramienta para el cálculo de soluciones de la ecuación de Pell, viendo cómo obtener la solución fundamental de la misma.

3.1. Fracciones continuas y números racionales

A lo largo de esta sección vamos a probar que todo número racional puede ser expresado como una fracción continua finita. Pasamos a definir conceptos que usaremos a lo largo del capítulo para este fin.

Definición 3.1. Una **fracción continua** es una expresión de la forma

$$a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{\ddots}}}, \quad a_1 \in \mathbb{Z},\ a_2, \ldots, a_n, \cdots \in \mathbb{Z}_{>0}. \tag{3.1}$$

donde el número de términos puede ser finito o infinito. Usaremos la siguiente notación para referirnos a fracciones continuas:

$$[a_1, a_2, a_3, \ldots] = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{\ddots}}}. \tag{3.2}$$

En el caso en el que el número de términos es finito, se trata de una **fracción continua finita** y llamaremos a los términos $a_1, \ldots a_n$ los **cocientes parciales** de la fracción continua. Ahora mediante un ejemplo, explicamos cómo podemos pasar de una fracción continua finita a un número racional.

Ejemplo 1.

$$[1,2,3,2] = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3+\frac{1}{2}}} = 1 + \frac{1}{2+\frac{2}{7}} = 1 + \frac{1}{\frac{16}{7}} = 1 + \frac{7}{16} = \frac{23}{16}.$$

Siguiendo este procedimiento, vemos que toda fracción continua finita define un número racional. Pasamos a ver una serie de observaciones previas:

Observación 3.2. Si $p > q > 0$ y $\frac{p}{q} = [a_1, \dots a_n]$ entonces $\frac{q}{p} = [0, a_1, \dots a_n]$. Esta observación no es cierta si $\frac{p}{q} < 0$. Por ejemplo, $\frac{-7}{2} = [-4, 2]$ y $\frac{-2}{7} = [-1, 1, 2, 1]$.

Observación 3.3. Sea $x = [a_1, \dots a_n]$ una fracción continua. Entonces $x < 0$ si y solo si $a_1 < 0$. Tendremos que $x \geq 0$ si y solo si $a_1 \geq 0$. En particular, $x = [a_1, \dots a_n] \in (0, 1)$ si y solo si $a_1 = 0$. Para entender esta observación, basta con ver que $a_1 = \lfloor x \rfloor$.

Observación 3.4. Sea $\frac{p}{q}$ un número racional. Si multiplicamos numerador y denominador por un cierto número, no varía su expresión como fracción continua. Lo que es más, si dada una fracción continua finita queremos ver con qué número racional se corresponde, siempre vamos a obtener la fracción $\frac{p}{q}$ irreducible, es decir $(p, q) = 1$.

Teorema 3.5. *Cualquier fracción continua finita representa un número racional. Recíprocamente, cada número racional $\frac{p}{q}$ puede representarse como una fracción continua finita; y si imponemos que $a_n \geq 2$, tenemos que la representación o expansión es única, por lo que tenemos una biyección entre los números racionales y las fracciones continuas finitas.*

Demostración. La primera parte del teorema es clara, basta con observar el procedimiento seguido en el Ejemplo 1. Teniendo una fracción continua finita, siempre podemos volver atrás y pasar de la fracción continua al número racional.
Para probar el recíproco, supongamos que $c \in \mathbb{Q}$ es menor que 0. Entonces podemos escribir $c = \lfloor c \rfloor + \{c\}$ donde $\lfloor c \rfloor$ denota la parte entera de c y por tanto, $c - 1 < \lfloor c \rfloor \leq c$ y $\{c\}$ es la parte decimal de c, por lo que $0 \leq \{c\} < 1$. Por tanto, o bien $\{c\} = 0$ y por tanto $c \in \mathbb{Z}$ con lo que la expresión como fracción continua sería c, o bien $\{c\} \neq 0$ y podemos escribir $c = \lfloor c \rfloor + \frac{1}{\frac{1}{\{c\}}}$. Por tanto, como $\frac{1}{\{c\}}$ es un número racional positivo, hemos reducido el problema al caso en el que $c > 0$.

Por tanto, tomamos $c = \frac{p}{q} > 0$ racional con p, $q > 0$ y coprimos. Usamos el algoritmo de Euclides, siendo este algoritmo el que se emplea para hallar el máximo común divisor de dos números enteros dados p y q, para así obtener a_i, $r_i \in \mathbb{Z}_{>0}$ con $i = 1, \dots, n$, a excepción de $r_0 = 0$, tales que:

$$\begin{array}{lll} \frac{p}{q} = a_1 + \frac{r_1}{q} \quad 0 < r_1 < q, & & \frac{r_{n-3}}{r_{n-2}} = a_{n-1} + \frac{r_{n-1}}{r_{n-2}} \quad 0 < r_{n-1} < r_{n-2}, \\ & \dots & \\ \frac{q}{r_1} = a_2 + \frac{r_2}{r_1} \quad 0 < r_2 < r_1, & & \frac{r_{n-2}}{r_{n-1}} = a_n + \frac{0}{r_{n-1}} = a_n + 0 \quad r_n = 0. \end{array} \tag{3.3}$$

Es imposible que partiendo de un número racional no lleguemos a un resto 0, es decir, el proceso no puede continuar indefinidamente. Supongamos que si, en tal caso los restos obtenidos $r_1, r_2, r_3, \dots$ formarían una secuencia decreciente de enteros no negativos

$q > r_1 > r_2 > r_3 > \dots$ y a menos que lleguemos finalmente a un resto $r_n = 0$, estaríamos en la situación de haber encontrado un número infinito de enteros positivos distintos, todos menores que un entero positivo dado, lo cual es una contradicción. Por tanto, tras de un número finito de divisiones, llegamos al resto $r_n = 0$. Ahora usando las ecuaciones de (3.3) es fácil representar el número $\frac{p}{q}$ como fracción continua finita.

$$\frac{p}{q} = a_1 + \frac{1}{\frac{q}{r_1}} = a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\frac{r_1}{r_2}}} = a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{a_{n-1} + \frac{r_{n-1}}{r_{n-2}}}}}} = [a_1, \dots, a_n]. \tag{3.4}$$

Tratemos la unicidad de la expansión (3.4). Para que la expansión como fracción continua de un número racional sea única, basta con imponer que $a_n \geq 2$. Para ver esto, observamos que si $a_n > 1$ podemos escribir $\frac{1}{a_n} = \frac{1}{(a_n - 1) + \frac{1}{1}}$, por lo que (3.4) puede reemplazarse por:

$$\frac{p}{q} = [a_1, \dots, a_{n-1}a_n - 1, 1]. \tag{3.5}$$

Por otro lado, si $a_n = 1$, entonces $\frac{1}{a_{n-1} + \frac{1}{a_n}} = \frac{1}{a_{n-1}+1}$, de forma que 3.4 se convierte en:

$$\frac{p}{q} = [a_1, \dots, a_{n-2}, a_{n-1} + 1]. \tag{3.6}$$

Por tanto, para que obtener la correspondencia biyectiva que buscamos entre los números racionales y fracciones continuas finitas $[a_1, \dots, a_n]$ basta con imponer la condición de que $a_n \geq 2$. □

Con esta demostración hemos probado el siguiente teorema:

Teorema 3.6. *Todo número racional puede expresarse como una fracción continua finita donde el último término puede modificarse para hacer que el número de términos de la expansión como fracción continua sea tanto par como impar.*

3.2. Fracciones continuas y números reales

En esta sección vamos a identificar de forma unívoca un número irracional con una expansión como fracción continua infinita. Recíprocamente, cualquier fracción continua infinita define un número irracional y ambas construcciones son inversas la una de la otra. Con la biyección que ya tenemos para los racionales, llegamos a que existe una biyección entre los números reales y las fracciones continuas. Definiremos el concepto de i-ésimo convergente de una fracción continua y demostraremos algunas de sus principales propiedades que nos serán útiles para demostrar resultados posteriores.

Definición 3.7. Una **fracción continua infinita** es una sucesión de números enteros $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ de manera que $a_i > 0$ para todo $i > 1$. La expresaremos mediante $[a_1, a_2, \dots, a_n, \dots]$.

Para continuar, introducimos el concepto de convergente y vemos algunas de sus propiedades.

Definición 3.8. Dada una fracción continua $[a_1, \ldots, a_n, \ldots]$ llamamos **i-ésimo convergente** al número $c_i = [a_1, \ldots, a_i]$ con $i \in \mathbb{Z}_{i\geq 0}$.

Observación. Se tiene que $c_i = [a_1, a_2, \ldots, a_i] \in \mathbb{Q}$, pues se trata de una fracción continua y finita y por tanto, por el Teorema 3.5, c_i es racional y puede escribirse como $c_i = \frac{p_i}{q_i}$.

Teorema 3.9. *Sea $c_i = \frac{p_i}{q_i}$ el i-ésimo convergente de una fracción continua $[a_1, \ldots, a_n, \ldots]$. Entonces se cumple que:*

$$p_i = a_i p_{i-1} + p_{i-2}; \qquad q_i = a_i q_{i-1} + q_{i-2}, \qquad i = 1, 2, 3, \ldots \tag{3.7}$$

$$\textit{con valores iniciales} \quad p_0 = 1, \qquad p_{-1} = 0, \qquad q_0 = 0 \qquad q_{-1} = 1. \tag{3.8}$$

1. Además se tiene que para $i \geq 2$,

$$p_i q_{i-1} - p_{i-1} q_i = (-1)^i. \tag{3.9}$$

2. Para todo i se cumple que:

$$c_i - c_{i-1} = \frac{(-1)^i}{q_i\, q_{i-1}}, \qquad c_i - c_{i-2} = \frac{a_i\,(-1)^{i-1}}{q_i\, q_{i-2}}. \tag{3.10}$$

Demostración. Ver Apéndice C. □

Corolario 3.10. *Sea $c_i = \frac{p_i}{q_i}$ el i-ésimo convergente de una fracción continua . Entonces se cumple que $(p_i, q_i) = 1$. Por tanto, c_i es una fracción irreducible.*

Demostración. Como $p_i q_{i-1} - p_{i-1} q_i = (-1)^i$, cualquier otro número que divida tanto a p_i como a q_i debe ser un divisor de $(-1)^i$. Por ende, $c_i = \frac{p_i}{q_i}$ es una fracción irreducible. □

Observación 3.11. El Teorema 3.9 (b) nos dice que para $k = 2i$, $c_{2i-2} > c_{2i} > c_{2i-1}$, mientras que por su lado, para $k = 2i + 1$, $c_{2i} > c_{2i+1} > c_{2i-1}$. Este razonamiento se sigue de este procedimiento:

1. $c_2 - c_1 = \frac{(-1)^2}{q_1\, q_2} = \frac{1}{q_1\, q_2} > 0$ pues $q_1\, q_2 > 0$, lo cual implica que $c_2 - c_1 > 0$ y por tanto $c_2 > c_1$.
2. $c_3 - c_2 = \frac{(-1)^3}{q_2\, q_3} = \frac{-1}{q_2\, q_3} < 0$, y a su vez, $c_3 - c_2 < 0$ de manera que $c_3 < c_2$.
3. $c_3 - c_1 = \frac{a_3\,(-1)^2}{q_1\, q_3} = \frac{a_3}{q_1\, q_3} > 0$, por lo que $c_3 > c_1$ y por tanto, $c_1 < c_3 < c_2$.
4. $c_4 - c_2 = \frac{a_4(-1)^3}{q_2\, q_4} = \frac{-a_4}{q_2\, q_4} < 0$ y nos queda que $c_4 < c_2$.

Observando este comportamiento podemos generalizar de forma que $c_1 < c_3 < c_5 < \ldots$ y $c_2 > c_4 > c_6 > \ldots$. Además, para $k \in \mathbb{N}$, $c_{2k} > c_{2l+1}$ y $c_{2k+1} < c_{2l}$ para todo $l \in \mathbb{N}$. Por último, c_{k+1} está comprendido entre c_{k-1} y c_k.

Teorema 3.12. *Sea $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$ una sucesión de números enteros positivos. Entonces la sucesión $(c_i)_{i=1}^{\infty}$ converge, es decir, $\lim_{i\to\infty}[a_1, \ldots, a_i] \in \mathbb{R}$.*

Demostración. Por la observación anterior, el orden de los i-ésimos convergentes es el siguiente:

$$c_1 < c_3 < \ldots < c_{2i+1} < c_{2i} < \ldots < c_4 < c_2.$$

Por tanto, $c_2 > c_4 > \ldots > c_{2i} > \ldots$ con $i \in \mathbb{N}$, todos ellos mayores que c_1 de manera que la sucesión $(c_{2i})_{i\geq 1}$ es decreciente y acotada inferiormente, por tanto, es convergente. Llamamos $\alpha_2 = \lim_{i\to\infty} c_{2i}$.
Por otro lado, $c_1 < c_3 < \ldots < c_{2i+1} < \ldots$ con $i \in \mathbb{N}$, todos ellos menores que c_{2i} para todo $i \in \mathbb{N}$, en particular, menores que c_2. Entonces, como la sucesión $(c_{2i+1})_{i\geq 0}$ es creciente y acotada superiormente, es convergente y llamamos α_1 a su límite.
Veamos ahora que $\alpha_1 = \alpha_2$. Nótese que $\alpha_2 \geq \alpha_1$ (pues α_1 es el límite de los términos impares, que son todos menores que los términos pares, cuyo límite es α_2). Por (3.7), vemos que q_i viene dado de forma recurrente como $q_i = a_i\ q_{i-1} + q_{i-2}$ con valores iniciales $q_{-1} = 1 > 0$, $q_0 = 0$ y $a_i > 0$, $i > 1$. De forma inductiva, para todo i se tiene:

$$q_{i+1} = a_{i+1}\ q_i + q_{i-1} = a_{i+1}\ (a_i\ q_{i-1} + q_{i-2}) + q_{i-1} = q_{i-1}\ (a_{i+1}a_i + 1) + q_{i-2}\ a_{i+1}.$$

De manera que, como $a_{i+1}a_i + 1 > a_i$ y $a_{i+1} > 1$, se tiene que $q_{i+1} = (a_{i+1}a_i + 1)\ q_{i-1} + a_{i+1}\ q_{i-2} > a_i\ q_{i-1} + q_{i-2} = q_i$. Por tanto, los términos q_i forman una sucesión creciente de enteros positivos, de manera que $q_{2i+1}\ q_{2i}$ crece de forma indefinida cuando i tiende a infinito. Por tanto,

$$\lim_{i\to\infty} \frac{1}{q_{2i+1}\ q_{2i}} = 0,$$

y dado que por (3.10) tenemos que $c_{2i+1} - c_{2i} = \frac{1}{q_{2i+1}\ q_{2i}}$, nos queda que $\lim_{i\to\infty}(c_{2i+1} - c_{2i}) = 0$. Con esto, $\lim_{i\to\infty} c_{2i+1} = \lim_{i\to\infty} c_{2i}$, por lo que concluimos que α_1 y α_2 coinciden:

$$\alpha_2 = \lim_{i\to\infty} c_{2i} = \lim_{i\to\infty} c_{2i+1} = \alpha_1 = \alpha.$$

Es decir, ambas sucesiones tienden al mismo límite $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$ con $\lim_{i\to\infty} c_i = \alpha$. □

Corolario 3.13. *Sea c_i el i-ésimo convergente de $x = [a_1, \ldots, a_i, \ldots]$. Entonces se tiene que $c_{2i+1} < x < c_{2i}$ para todo $i \geq 1$. Como consecuencia, se tiene que $x = \lim_{i\to\infty} c_i$.*

Demostración. Ver Apéndice C. □

Este corolario identifica de forma unívoca un número irracional con una expansión como fracción continua infinita. Recíprocamente, cualquier fracción continua infinita define un número real x y ambas construcciones son inversas la una de la otra. Con la biyección que ya tenemos para los racionales, hemos probado el siguiente teorema.

Teorema 3.14. *Existe una biyección entre el conjunto de los números reales y el conjunto de fracciones continuas (finitas para racionales e infinitas para irracionales).*

3.3. Fracciones continuas periódicas y números irracionales cuadráticos

A lo largo de esta sección vamos a analizar las fracciones continuas periodicas debido a su vínculo con los números que se conocen como irracionales cuadráticos. Más concretamente, estudiaremos a fondo las fracciones continuas periódicas puras por su relación con los irracionales cuadráticos reducidos. Todos estos conceptos son relevantes para la resolución de ecuaciones de Pell y para ser capaces de encontrar la solución fundamental de la misma.

Definición 3.15. Decimos que una fracción continua es **periódica** si existen $n \geq 0$ y $m \geq 1$ tales que $a_k = a_{k+m}$ para todo $k \geq m$. En otras palabras,

$$[a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}, \ldots, a_{n+m}, a_{n+1}, \ldots, a_{n+m}, \ldots].$$

donde la secuencia de términos $a_{n+1}, \ldots, a_{n+m}$ se repite indefinidamente. En tal caso, escribimos esto como $[a_1, a_2, \ldots, a_n, \overline{a_{n+1}, \ldots, a_{n+m}}]$. Si n, m son los enteros más pequeños que cumplen esta propiedad, decimos que los términos $a_1, \ldots, a_n$ forman el **pre-periodo** y llamamos **periodo** a la sucesión de términos $a_{n+1}, \ldots, a_{n+m}$ que se repiten indefinidiamente. La **longitud del periodo** es m.

Definición 3.16. Llamamos **fracción continua periódica pura** a aquella cuyo pre-periodo no consta de ningún término, es decir, cuando $n = 0$ y por tanto son periódicas desde el primer término.

Enunciamos un resultado que necesitaremos para probar el teorema central de la sección cuya demostración se añade en el Apéndice C del trabajo.

Proposición 3.17. Sea $\alpha = [a_1, \ldots, a_n, \alpha_{n+1}]$ donde $\alpha_{n+1} = [a_{n+1}, \ldots]$. Entonces,

$$\alpha = \frac{\alpha_{n+1} p_n + p_{n-1}}{\alpha_{n+1} q_n + q_{n-1}}, \qquad n \geq 1. \tag{3.11}$$

Supongamos ahora que la expansión como fracción continua de un cierto α es periódica pura. Podemos entonces escribir $\alpha = [\overline{a_1, \ldots, a_n}] = [a_1, \ldots, a_n, \alpha_{n+1}]$, lo cual nos permite ver que

$$\alpha_{n+1} = [\overline{a_1, \ldots, a_n}] = \alpha. \tag{3.12}$$

Por tanto, en el caso en el que la expansión como fracción continua de α es periódica pura, la Proposición 3.17 nos dice que:

$$\alpha = \frac{\alpha\, p_n + p_{n-1}}{\alpha\, q_n + q_{n-1}}. \tag{3.13}$$

Notación. Denotaremos como α a la raíz positiva de una ecuación cuadrática con coeficientes enteros y usaremos α' para referirnos a la raíz conjugada de α, es decir, la segunda raíz de la ecuación cuadrática de la que α es raíz.

Teorema 3.18. *Si $a_1, \ldots, a_n$ son enteros positivos, la fracción continua periódica pura $\alpha = [\overline{a_1, \ldots, a_n}] > 1$ y es la raíz positiva de una ecuación cuadrática con coeficientes enteros. Además, si $\beta = [\overline{a_n, \ldots, a_1}]$ es la fracción continua de α con el periodo en orden inverso, entonces $\frac{-1}{\beta} = \alpha'$ es la raíz conjugada de la ecuación cuadrática que satisface α' y, además, $\alpha' \in (-1, 0)$.*

Demostración. Definimos $\frac{p_n}{q_n}$ y $\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$ respectivamente, como el n-ésimo y el $(n-1)$-ésimo convergente de la fracción continua $\alpha = [\overline{a_1, \ldots, a_n}]$. Tenemos que si $\frac{p_n}{q_n} = [a_1, \ldots, a_n]$, con $p_n = a_n\, p_{n-1} + p_{n-2}$, pasando dividiendo entre p_{n-1} en esta última recurrencia nos queda que:

$$\frac{p_n}{p_{n-1}} = a_n + \frac{p_{n-2}}{p_{n-1}} = a_n + \frac{1}{\frac{p_{n-1}}{p_{n-2}}} = \left[a_n, \frac{p_{n-1}}{p_{n-2}}\right].$$

Iterando esta construcción, por inducción llegamos a que: $\frac{p_n}{p_{n-1}} = [a_n, \ldots, a_1] = \frac{p'_n}{q'_n}$, y además, usando que $q_i = a_i q_{i-1} + q_{i-2}$ con valores iniciales dados en (3.8) y aplicando inducción, nos queda que $\frac{q_n}{q_{n-1}} = [a_n, \ldots, a_2] = \frac{p'_{n-1}}{q'_{n-1}}$, donde $\frac{p'_n}{q'_n}$ y $\frac{p'_{n-1}}{q'_{n-1}}$ representan el n-ésimo y el $(n-1)$-ésimo convergente de la fracción continua $[a_n, \ldots, a_1]$. Como los convergentes son fracciones irreducibles por el Corolario 3.10, se dan las siguientes igualdades:

$$p'_n = p_n, \qquad p'_{n-1} = q_n, \qquad q'_n = p_{n-1}, \qquad q'_{n-1} = q_{n-1}. \tag{3.14}$$

Dado que α es periódico puro, usando la igualdad (3.12) podemos escribirlo como $\alpha = [a_1, a_2, \ldots, a_n, \alpha]$ y, de acuerdo con (3.13), nos queda que:

$$\alpha = \frac{\alpha p_n + p_{n-1}}{\alpha q_n + q_{n-1}}. \tag{3.15}$$

La ecuación (3.15) es equivalente a la ecuación cuadrática siguiente:

$$q_n \alpha^2 - (p_n - q_{n-1})\, \alpha - p_{n-1} = 0. \tag{3.16}$$

Revirtiendo el periodo de α obtenemos que $\beta = [a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, \beta]$, y de nuevo, de acuerdo con (3.15) tenemos la siguiente igualdad:

$$\beta = \frac{\beta p'_n + p'_{n-1}}{\beta q'_n + q'_{n-1}}. \tag{3.17}$$

Usando las igualdades de (3.14), podemos reemplazar (3.17) por:

$$\beta = \frac{\beta p_n + q_n}{\beta p_{n-1} + q_{n-1}}.$$

Por tanto, β satiface la ecuación $p_{n-1}\beta^2 - (p_n - q_{n-1})\beta - q_n = 0$, que es equivalente a la ecuación cuadrática siguiente:

$$q_n \left(-\frac{1}{\beta}\right)^2 - (p_n - q_{n-1}) \left(-\frac{1}{\beta}\right) - p_{n-1} = 0. \tag{3.18}$$

Comparando las ecuaciones (3.16) y (3.18), concluimos que la ecuación cuadrática $q_n x^2 - (p_n - q_{n-1})x - p_{n-1} = 0$ tiene dos raíces: la raíz $x_1 = \alpha$ y la raíz $x_2 = -\frac{1}{\beta}$. Ahora, β constituye la fracción continua periódica pura $[\overline{a_n, \ldots, a_1}]$, donde $a_n, \ldots, a_1$ son todos enteros positivos, por tanto, atendiendo a la Observación 3.3 tenemos que $\beta > 1$, $0 < \frac{1}{\beta} < 1$ y por tanto $-1 < -\frac{1}{\beta} < 0$. En otras palabras, la raíz $\alpha' = -\frac{1}{\beta}$ está entre -1 y 0. Esto completa la demostración. □

El recíproco de este teorema es también cierto. Esto significa que si $\alpha > 1$ satisface una ecuación con coeficientes enteros y la segunda raíz α' de esta ecuación cuadrática está entre -1 y 0 , entonces la expansión como fracción continua de α es periódica pura. Tal α que verifica las condiciones del teorema se conoce como cuadrático irracional reducido. Para ello, pasamos a definir los conceptos de números cuadráticos irracionales y en concreto, aquellos que son reducidos, con el fin de demostrar el recíproco de este teorema.

Definición 3.19. Un **número cuadrático irracional** es un número que satisface una ecuación cuadrática cuyos coeficientes son enteros y cuyo discriminante es positivo y además no es un cuadrado perfecto.

Observación. Trabajaremos con números cuadráticos irracionales que pueden escribirse como $A + B\sqrt{D}$ donde $A, B \in \mathbb{Q}$ y $D \in \mathbb{Z}_{>0}$ libre de cuadrados, por lo tanto, $A + B\sqrt{D}$ es irracional. Asumiremos por tanto que $B \neq 0$.

Proposición 3.20. Dado $\alpha = A + B\sqrt{D}$ con $A, B \in \mathbb{Q}$ y $D \in \mathbb{Z}_{>0}$ libre de cuadrados,

1. Entonces α es raíz de una ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$ donde los coeficientes $a > 0, b, c$ son enteros y donde el discriminante $b^2 - 4ac > 0$. $(x \in \mathbb{R})$.
2. Entonces tal número cuadrático irracional $A + B\sqrt{D}$ con $B \neq 0$ satisface una única ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ donde a, b, c no tienen factores comunes, es decir $(a, b, c) = 1$.
3. Entonces $\alpha = A + B\sqrt{D}$ tiene un conjugado $\alpha' = A - B\sqrt{D}$ que también satisface la ecuación.

Demostración. Ver Apéndice C. □

Con el fin de demostrar el recíproco del Teorema 3.18, introducimos el concepto de número irracional cuadrático reducido.

Definición 3.21. Un número irracional cuadrático $\alpha \in \mathbb{Q}(\sqrt{D})$ se dice **reducido** si se cumple que $\alpha > 1$ y además, $\alpha' \in (-1, 0)$.

La importancia de este concepto radica en que fijado un cierto D, solo existe un número finito de números irracionales cuadráticos reducidos de la forma:

$$\alpha = \frac{P + \sqrt{D}}{Q}, \tag{3.19}$$

donde α es un número irracional cuadrático por lo que $P, Q \in \mathbb{Z}$ y $D > 0$ es un entero que no es un cuadrado perfecto. Con esta finalidad, probamos el siguiente lema:

Lema 3.22. *Sea $D \in \mathbb{Z}_{>0}$ un entero que no es un cuadrado perfecto. Entonces solo hay un número finito de irracionales cuadráticos reducidos en $\mathbb{Q}(\sqrt{D})$.*

Demostración. Dado $\alpha = \frac{P+\sqrt{D}}{Q}$ con $P, Q \in \mathbb{Z}$ y $Q > 0$ y $\alpha' = \frac{P-\sqrt{D}}{Q}$. Supongamos que α es reducido, es decir, que $\alpha > 1$, $\alpha' \in (-1, 0)$.
Puesto que $\alpha + \alpha' > 0$, se tiene que $\alpha + \alpha' = \frac{P+\sqrt{D}+P-\sqrt{D}}{Q} = \frac{2P}{Q} > 0$ lo cual implica que $P > 0$ (pues $Q > 0$).
Por otro lado, $\alpha' = \frac{P-\sqrt{D}}{Q} < 0$ luego $P - \sqrt{D} < 0$ y por tanto $P < \sqrt{D}$.
Así pues tendremos que $0 < P < \sqrt{D}$. Como $\alpha > 1$, $\frac{P+\sqrt{D}}{Q} > 1$, entonces $P+\sqrt{D} > Q$.
La desigualdad $\alpha' > -1$ implica que $P - \sqrt{D} > -Q$, es decir, $-P + \sqrt{D} < Q$. Por tanto, $0 < -P + \sqrt{D} < Q < P + \sqrt{D}$. Juntando ambas cotas:

$$\begin{gathered} 0 < P < \sqrt{D}. \\ 0 < -P + \sqrt{D} < Q < P + \sqrt{D}. \end{gathered} \tag{3.20}$$

Por tanto concluimos que solo hay una cantidad finita de irracionales cuadráticos reducidos de la forma (3.19) fijado un cierto D. □

Dado $D > 1$ entero fijo que no sea un cuadrado perfecto, siempre existe un número cuadrático reducido asociado a él llamado: $\alpha = \lambda + \sqrt{D}$ donde λ es el entero más grande menor que $\sqrt{D}$, es decir $\lambda = \lfloor \sqrt{D} \rfloor$. De esta manera, $\alpha = \lambda + \sqrt{D} > 1$ y por tanto, $\alpha' = \lambda - \sqrt{D} = \lfloor \sqrt{D} \rfloor - \sqrt{D} \in (-1, 0)$. Por tanto, tal α construido de esta forma es un número irracional cuadrático reducido. La ecuacion cuadrática que satisfacen α y α' es $x^2 - 2\lambda x + \lambda^2 - D = 0$.

Proposición 3.23. Si α es un número cuadrático reducido, puede expresarse como $\alpha = a_1 + \frac{1}{\alpha_1}$ donde $a_1 = \lfloor \alpha \rfloor$ y α_1 es un número irracional cuadrático reducido. Además, su asociado $\beta = \frac{-1}{\alpha'}$ es también un número irracional cuadrático reducido.

Demostración. Sea α es un número cuadrático reducido y supongamos que es raíz de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$, de forma que:

$$\alpha = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{P + \sqrt{D}}{Q} \quad \text{con} \quad a, b, c \in \mathbb{Z}, \quad a > 0,$$

$$P = -b, \quad Q = 2a, \quad D = b^2 - 4ac > 0 \text{ cuadrado no perfecto.}$$

Si escribimos α de la forma $\alpha = a_1 + \frac{1}{\alpha_1}$ donde $a_1 = \lfloor \alpha \rfloor$, α satisface la ecuación cuadrática:

$$a\left(a_1 + \frac{1}{\alpha_1}\right)^2 + b\left(a_1 + \frac{1}{\alpha_1}\right) + c = 0.$$

Multiplicando por α_1^2 nos queda $\alpha_1^2\left(aa_1^2 + ba_1 + c\right) + \alpha_1\left(2a_1a + b\right) + a = 0$. Resolviéndo dicha ecuación cuadrática, obtenemos que su raíz positiva es de la forma:

$$\alpha_1 = \frac{-(2a_1a + b) + \sqrt{(2a_1a + b)^2 - 4\left(aa_1^2 + ba_1 + c\right)a}}{2\left(aa_1^2 + ba_1 + c\right)} = \frac{-(2a_1a + b) + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2\left(aa_1^2 + ba_1 + c\right)}$$
$$= \frac{P_1 + \sqrt{D_1}}{Q_1},$$

de manera que $D = D_1 = b^2 - 4ac$, $P_1 = -(2a_1a + b)$ y $Q_1 = 2\ (aa_1^2 + ba_1 + c)$. Claramente P_1, Q_1 y $D_1 \in \mathbb{Z}$. Por otro lado, α_1 tiene la misma parte irracional que $\sqrt{D}$. Ahora demostramos que α_1 es un número cuadrático reducido. Para este fin, recordamos que $a_1 = \lfloor \alpha \rfloor$ y por tanto, como $\alpha = a_1 + \frac{1}{\alpha_1}$ tenemos que $0 < \frac{1}{\alpha_1} < 1$, por tanto $\alpha_1 > 1$, luego faltaría ver que $\alpha_1' \in (-1, 0)$.

$$\alpha = a_1 + \frac{1}{\alpha_1} \Longrightarrow \alpha_1 = \frac{1}{\alpha - a_1}.$$

Dado que $n' = n$ siempre que $n \in \mathbb{Z}$, aplicando esto a la igualdad anterior:

$$\alpha_1' = \left(\frac{1}{\alpha - a_1}\right)' = \frac{1'}{(\alpha - a_1)'} = \frac{1}{\alpha' - a_1}.$$

Con lo que nos queda $-\frac{1}{\alpha_1'} = a_1 - \alpha' > 1$ (pues $a_1 \geq 1$) y por su parte $\alpha' \in (-1, 0)$ por ser α un número irracional cuadrático reducido. Por lo tanto, α_1 es un número irracional cuadrático reducido de manera que las inecuaciones (3.20) son automáticamente heredadas para P_1, Q_1 y $D_1 = D$. Por último, por las inecuaciones (3.20), $\alpha > 1$, $\alpha' \in (-1, 0)$ tenemos que $\beta > 1$ y $\beta' = \frac{-1}{\alpha} \in (-1, 0)$ luego β es también un número irracional cuadrático reducido. □

Con todo esto, pasamos a probar el recíproco del Teorema 3.18.

Teorema 3.24. *Si α es un cuadrático irracional reducido, entonces la fracción continua de α es periódica pura.*

Demostración. Hemos visto que si α es un número cuadrático irracional reducido, $\alpha = \frac{P+\sqrt{D}}{Q} = a_1 + \frac{1}{\alpha_1}$ con $\lfloor \alpha \rfloor = a_1$ y donde $\alpha_1 = \frac{P_1+\sqrt{D}}{Q_1}$ es un irracional cuadrático reducido asociado con D. Iterando el proceso de construcción de α_1, obtenemos una serie de ecuaciones de esta forma:

$$\alpha = a_1 + \tfrac{1}{\alpha_1}, \qquad \alpha_1 = a_2 + \tfrac{1}{\alpha_2}, \quad \ldots \qquad \alpha_{n-1} = a_n + \tfrac{1}{\alpha_n} \quad \ldots$$

donde $\alpha, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}, \ldots$ son todos irracionales cuadráticos reducidos asociados con D y donde $\alpha = [a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots]$. Como α es irracional, este proceso puede iterarse de forma infinita y por tanto, aparentemente estamos generando una cantidad infinita de números reducidos $\alpha, \alpha_1, \ldots, \alpha_n, \ldots$, todos ellos asociados con D. Pero habíamos probado en el Lema 3.22 que sólo puede haber una cantidad finita de números cuadráticos irraciones reducidos α de la forma dada en (3.19) asociados a un cierto D fijo. Por tanto, concluimos que hay términos que se repiten.
Llamamos α_l al primer término de la secuencia $\alpha, \alpha_1, \ldots$ que se repite. Vamos a probar que entonces, $\alpha_k = \alpha_l$ para todo $k \in [0, l)$ y además, se cumple que $\alpha_k = \alpha$. Es decir:

1. Una vez que un término se repite, toda la subsecuencia $\alpha, \alpha_1, \ldots, \alpha_l$ se repite, en otras palabras, si $\alpha_k = \alpha_l$ entonces $\alpha_{k+1} = \alpha_{l+1}, \alpha_{k+2} = \alpha_{l+2}, \ldots$.
2. El primer término de la secuencia, α, se repite, en otras palabras, la secuencia $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \ldots$ es periódica pura. De manera que la fracción continua para α tiene la forma: $\alpha = [\overline{a_1, \ldots, a_s}]$, es decir, es una fracción continua periódica pura.

Demostramos estas dos afirmaciones en el Apéndice C. □

3.4. Teorema de Lagrange

Hemos visto que todo número irracional cuadrático reducido se corresponde con una expansión como fracción continua que es periódica pura. Vamos a extender la demostración al caso en el que el número irracional no sea reducido. En este caso, todo número irracional cuadrático no necesariamente reducido se corresponde con una expansión como fracción continua que es periódica a partir de un cierto punto. Este resultado lo recoge el Teorema de Lagrange que demostraremos a continuación.

Teorema de Lagrange. *Todo número irracional cuadrático α se puede expresar como una fracción continua periódica.*

Demostración. Sea α un número cuadrático irracional cuya expansión como fracción continua es $\alpha = [a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots]$. Dado que α es irracional, sabemos que tal expresión tiene infinitos términos. La escribimos de esta forma $\alpha = [a_1, a_2, \ldots, \alpha_{n+1}]$. Entonces, por la Proposición 3.17 sabemos que $\alpha = \frac{\alpha_{n+1}p_n + p_{n-1}}{\alpha_{n+1}q_n + q_{n-1}}$ donde α y α_{n+1} son irracionales cuadráticos y $\alpha_{n+1} > 1$. Tomando conjugados a ambos lados de la igualdad, obtenemos que:

$$\alpha' = \frac{\alpha'_{n+1}p_n + p_{n-1}}{\alpha'_{n+1}q_n + q_{n-1}}.$$

Ahora, despejando α'_{n+1} y sacando factor común numerador y denominador, obtenemos:

$$\alpha'_{n+1} = -\frac{\alpha' q_{n-1} - p_{n-1}}{\alpha' q_n - p_n} = -\frac{q_{n-1}}{q_n}\left(\frac{\alpha' - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}}{\alpha' - \frac{p_n}{q_n}}\right) = -\frac{q_{n-1}}{q_n}\left(\frac{\alpha' - c_{n-1}}{\alpha' - c_n}\right), \tag{3.21}$$

donde $c_{n-1} = \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$ y $c_n = \frac{p_n}{q_n}$ son los convergentes n-ésimo y $(n-1)$-ésimo de α. Por la Proposición 3.13, sabemos que cuando n crece indefinidamente, tanto c_{n-1} como c_n tienden al límite α y en consecuencia:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\alpha' - c_{n-1}}{\alpha' - c_n}\right) = \frac{\alpha' - \alpha}{\alpha' - \alpha} = 1. \tag{3.22}$$

Por el Corolario 3.13, sabemos que los convergentes c_n son alternativamente menores y mayores que α. Por tanto, cuando n crece, el valor de la fracción (3.22) no solo se va a acercar cada vez más a 1, sino que además será alternativamente un poco menor que 1 y un poco mayor que 1. Por (3.7), sabemos que cada q_i viene dado de forma recurrente como $q_i = a_i\ q_{i-1} + q_{i-2}$, por tanto, vienen dados en términos de a_n, q_n anteriores, y como todos ellos son enteros positivos, observamos que los términos q_i con $i = 0, 1, \ldots,$ crecen a medida que i aumenta. Ahora, fijándonos en (3.21), dado que $\alpha'_{n+1} > 0$ y acabamos de ver que q_n y q_{n-1} son ambos enteros positivos con $0 < q_{n-1} < q_n$, debe ser $\frac{q_{n-1}}{q_n} < 1$. Una vez encontrado un valor n que haga que la fracción $\frac{\alpha' - c_{n-1}}{\alpha' - c_n}$ sea significativamente menor que 1, el valor de (3.21), es decir, $\alpha'_{n+1} \in (-1, 0)$. Esto prueba que α_{n+1} es reducido y por el Teorema 3.24, la fracción continua de α será periódica a partir de ese punto. □

3.5. Resolución de ecuaciones de Pell con fracciones continuas

La expansión como fracción continua de $\sqrt{D}$ aporta las herramientas que necesitamos para hallar la solución fundamental de la ecuación de Pell y la ecuación $x^2 - Dy^2 = -1$ en caso de que la tenga. Con este método vamos a obtener la solución fundamental a la ecuación de Pell, es decir, vamos a obtener los dos enteros positivos más pequeños $x_1 > 0$, $y_1 > 0$ tales que satisfagan la ecuación. Una vez que tenemos esta solución fundamental, podemos obtener las demás soluciones positivas elevando dicha solución.

Proposición 3.25. Sea $D > 0$ entero libre de cuadrados. Entonces la expansión como fracción continua de $\sqrt{D}$ es de la forma:

$$\sqrt{D} = [a_1, \overline{a_2, a_3, a_4, \ldots, a_n, 2a_1}].$$

Demostración. Como $D > 0$, tenemos que $\sqrt{D} > 1$ y por tanto su conjugado, $-\sqrt{D} < -1$, luego D no es reducido, pues para ello su conjugado debería estar entre -1 y 0. Por tanto, por el Teorema 3.18, la expansión como fracción continua de $\sqrt{D}$ no es periódica pura.
Teniendo en cuenta que $\sqrt{D} = a_1 + \frac{1}{\alpha_1}$, $a_1 = \lfloor \sqrt{D} \rfloor$ luego $\sqrt{D} + a_1 > 1$, y por tanto, su conjugado $a_1 - \sqrt{D} \in (-1, 0)$. Esto implica que $\sqrt{D} + a_1$ es reducido y su expansión como fracción continua es periódica pura.
Como $\sqrt{D} = [a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots]$ entonces dado que $\sqrt{D} + a_1$ es un número irracional cuadrático reducido, debe ser $\sqrt{D} + a_1 = [\overline{2a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_n}]$ y por tanto, pasando al otro lado a_1 restando:

$$\sqrt{D} = [a_1, \overline{a_2, a_3, a_4, \ldots, 2a_1}], \tag{3.23}$$

donde el periodo comienza después del primer término y finaliza con $2a_1$. □

Teniendo en cuenta el resultado del Teorema 3.25, $\sqrt{D} = [a_1, \overline{a_2, \ldots, a_n, 2a_1}]$ y observando que

$$\alpha_{n+1} = [\overline{2a_1, \ldots, a_n}] = \sqrt{D} + a_1. \tag{3.24}$$

Usando la Proposición 3.17 tenemos:

$$\sqrt{D} = \frac{\alpha_{n+1} p_n + p_{n-1}}{\alpha_{n+1} q_n + q_{n-1}}, \tag{3.25}$$

donde $c_n = \frac{p_n}{q_n}$ y $c_{n-1} = \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$ son los convergentes de la expansión como fracción continua de $\sqrt{D}$. Reemplazando (3.24) en la igualdad de (3.25) :

$$\sqrt{D} = \frac{\left(\sqrt{D} + a_1\right) p_n + p_{n-1}}{\left(\sqrt{D} + a_1\right) q_n + q_{n-1}}.$$

Multiplicando a ambos lados por el denominador:

$$Dq_n + (a_1q_n + q_{n-1})\sqrt{D} = (a_1p_n + p_{n-1}) + p_n\sqrt{D}. \tag{3.26}$$

De manera que $Dq_n = a_1p_n + p_{n-1}$ y $a_1q_n + q_{n-1} = p_n$. Resolvemos para p_{n-1} y q_{n-1} en términos de p_n y q_n:

$$\begin{cases} p_{n-1} = Dq_n - a_1p_n, \\ q_{n-1} = p_n - a_1q_n. \end{cases} \tag{3.27}$$

Por el Teorema 3.9 sabemos que $p_nq_{n-1} - q_np_{n-1} = (-1)^n$, sustituyendo por los valores de p_{n-1} y q_{n-1} obtenidos en (3.27) tenemos:

$$p_n(p_n - a_1q_n) - q_n(Dq_n - a_1p_n) = (-1)^n \implies p_n^2 - Dq_n^2 = (-1)^n. \tag{3.28}$$

Si n es par, $p_n^2 - Dq_n^2 = (-1)^n = 1$ y por tanto, tenemos una solución particular de la ecuación $x^2 - Dy^2 = 1$, siendo ésta $x_1 = p_n$, $y_1 = q_n$. Si n es impar, $p_n^2 - Dq_n^2 = (-1)^n = -1$. Por tanto, para encontrar una solución a la ecuación de Pell $x^2 - Dy^2 = 1$ en este caso, hacemos lo siguiente: avanzamos hasta el segundo periodo de la expansión de $\sqrt{D}$, es decir, hasta el término a_n en el que el periodo se repite por segunda vez:

$$\sqrt{D} = [a_1, a_2, \ldots, a_n, 2a_1, a_2, \ldots, a_n, \overline{2a_1, a_2, \ldots, a_n}].$$

El término a_n repetido por segunda vez es realmente el término a_{2n}, que ocupa una posicion par, y por tanto, $p_{2n}^2 - Dq_{2n}^2 = (-1)^{2n} = 1$ y así obtenemos una solución particular, siendo esta $x_1 = p_{2n}$ e $y_1 = q_{2n}$. Todo esto se recoge en este enunciado:

Teorema 3.26. *Sea $D > 0$ entero libre de cuadrados tal que $\sqrt{D} = [a_1, \overline{a_2, ..., a_n, 2a_1}]$. Entonces se cumple que $p_n^2 - Dq_n^2 = (-1)^n = 1$ y $p_{2n}^2 - Dq_{2n}^2 = (-1)^{2n} = 1$, de manera que si n es par, (p_n, q_n) es una solución a la ecuación de Pell mientras que si n es impar, (p_{2n}, q_{2n}) es solución.*

La solución obtenida con este método es la fundamental, pero este hecho no es inmediato. El punto clave es que las soluciones de la ecuación de Pell dan unas aproximaciones muy buenas de $\sqrt{D}$ en el sentido de que $\frac{x_1}{y_1}$ es muy próximo a $\sqrt{D}$.

Teorema 3.27. *Si α es un número irracional y $\frac{x}{y} \in \mathbb{Q}$ con $y > 0$ tal que $|\alpha - \frac{x}{y}| < \frac{1}{2y^2}$, entonces $\frac{x}{y}$ es un convergente de la fracción continua de α.*

Demostración. Ver [7, Theorem 9.10] □

Teorema 3.28. *Sea $x^2 - Dy^2 = 1$ ecuación de Pell con $D > 0$ entero libre de cuadrados y sea (x, y) una solución de la misma con $x, y > 0$. Entonces $\frac{x}{y}$ es un convergente de $\sqrt{D}$, es decir, $\frac{x}{y}$ proviene de truncar la expansión de la fracción continua de $\sqrt{D}$.*

Demostración Teorema 3.28. Sea (x, y) una solución de $x^2 - Dy^2 = 1$ para un cierto D, con $x, y > 0$. Por tanto,

$$\left|\frac{(x - \sqrt{D}y)}{y}\right| = \frac{1}{y\,(x + \sqrt{D}y)}. \tag{3.29}$$

Usando que $0 < x - y\sqrt{D}$, nos queda $y\sqrt{D} < x$ y usando en la última desigualdad que $\sqrt{D} > 1$:

$$\left|\frac{x}{y} - \sqrt{D}\right| = \frac{1}{y(x + y\sqrt{D})} \leq \frac{1}{y(2y\sqrt{D})} \leq \frac{1}{2y^2}.$$

Por tanto, por el Teorema 3.27, $\frac{x}{y}$ es un convergente de la fracción continua de $\sqrt{D}$. □

Como habíamos visto, la fracción continua de $\sqrt{D}$ es periódica y la propiedad de aproximación del Teorema 3.27 implica que al cortar la expansión de múltiplos de la longitud de periodo, se obtienen números racionales cuyo numerador y denominador son soluciones de la ecuación de Pell. El Teorema 3.28 nos asegura que cualquier solución se obtiene a partir de un convergente de la fracción continua de $\sqrt{D}$, es decir, $x/y = p_n/q_n$ para algún n. Además, el Teorema 3.25 nos asegura que el desarrollo como fracción continua de $\sqrt{D}$ es periódico y de la forma $\sqrt{D} = [a_1, \overline{a_2, \ldots, a_n, 2a_1}]$. Por lo tanto n es un múltiplo de la longitud mínima del periodo de $\sqrt{D}$. Estos resultados, junto con el Teorema 3.26 nos permiten asegurar:

Corolario 3.29. *Sea $\sqrt{D} = [a_1, \overline{a_2, \ldots, a_n, 2a_1}]$ con n mínimo la fracción continua de $\sqrt{D}$. Entonces $p_n^2 - Dq_n^2 = (-1)^n$ y en consecuencia, si n es par, $\epsilon = p_n + q_n\sqrt{D}$ es la solución fundamental de la ecuación de Pell $x^2 - Dy^2 = 1$. Análogamente la unidad fundamental de $\mathbb{Z}[\sqrt{D}]$. Si n es impar, $\epsilon = p_{2n} + q_{2n}\sqrt{D}$ es la solución fundamental de la ecuación de Pell $x^2 - Dy^2 = 1$ y por tanto, la unidad fundamental de $\mathbb{Z}[\sqrt{D}]$.*

Ejemplo. Dada la ecuación de Pell $x^2 - 12y^2 = 1$, usamos el método explicado para calcular todas sus soluciones. La expansión como fracción continua de $\sqrt{12}$ es $[3, \overline{2, 6}]$. La longitud de periodo es 2, por tanto, como es par, la solucion fundamental vendrá dada por (p_2, q_2). Calculamos estos valores a partir de las recurrencias que conocemos:

$$p_{i+2} = p_i + p_{i+1}a_{i+2}, \quad q_{i+2} = q_i + q_{i+1}a_{i+2}.$$

a_i	3	2	6	2	6
p_i	3	7	45	97	...
q_i	1	2	13	28	...
c_i	3	7/2	45/13	97/28	...

Obtenemos $(p_2, q_2) = (7, 2)$, luego la solución fundamental ϵ de la ecuación $x^2 - 12y^2 = 1$ es $(x_0, y_0) = (7, 2)$. Escribiendo $\epsilon = 7 + 2\sqrt{12}$, observamos que el resto de soluciones vienen dadas como ϵ^n, con $n \in \mathbb{Z}$. Por ejemplo, $\epsilon^2 = (7 + 2\sqrt{12})^2 = 97 + 28\sqrt{12}$, de manera que tendríamos que $(97, 28)$ es también solución a la ecuación. Vemos que además, tal solución coincide con $(p_4, q_4) = (97, 28)$.

CAPÍTULO 4

Resolución del Problema del Ganado

4.1. Traducción del Problema del Ganado al lenguaje matemático

En notación matemática, el problema se traduce de la siguiente manera. Separamos el problema en dos partes, la primera de ellas, que se corresponde con las líneas 1-12, se resuelve con álgebra lineal. Escribiendo x, y, z y t como el número de toros blancos, negros, moteados y amarillos respectivamente y llamando $\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}, \tilde{t}$ al número de vacas de los mismos colores, obtenemos el siguiente sistema compatible indeterminado, de 7 ecuaciones lineales con 8 incógnitas cuya solución dependerá de un parámetro.

$$
\begin{cases}
x = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) y + t = \frac{5}{6}\, y + t \\
y = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right) z + t = \frac{9}{20}\, z + t \\
z = \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{7}\right) x + t = \frac{13}{42}\, x + t \\
\tilde{x} = \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)\left(y + \tilde{y}\right) = \frac{7}{12}\, \left(y + \tilde{y}\right) \\
\tilde{y} = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right)\left(z + \tilde{z}\right) = \frac{9}{20}\, \left(z + \tilde{z}\right) \\
\tilde{z} = \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6}\right)\left(t + \tilde{t}\right) = \frac{11}{30}\, \left(t + \tilde{t}\right) \\
\tilde{t} = \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{7}\right)\left(x + \tilde{x}\right) = \frac{13}{42}\left(x + \tilde{x}\right)
\end{cases}
\tag{4.1}
$$

Su planteamiento matricial es el siguiente:

$$
\begin{pmatrix}
1 & -5/6 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & -9/20 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-13/42 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -7/12 & 0 & 0 & 1 & -7/12 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -9/20 & 0 & 0 & 1 & -9/20 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -11/30 & 0 & 0 & 1 & -11/30 \\
-13/42 & 0 & 0 & 0 & -13/42 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \\ \tilde{x} \\ \tilde{y} \\ \tilde{z} \\ \tilde{t} \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}
$$

Usando álgebra lineal llegamos a la solución del sistema en función de un parámetro, siendo el vector $X = (x, y, z, t, \tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}, \tilde{t})$ de soluciones el siguiente:

$$X = \tilde{t} \cdot \left(\frac{3455494}{1813071}, \frac{828946}{604357}, \frac{7358060}{5439213}, \frac{461043}{604357}, \frac{2402120}{1813071}, \frac{543694}{604357}, \frac{1171940}{1813071}, 1 \right),$$

con $\tilde{t} \in \mathbb{Z}_{>0}$. Buscamos soluciones enteras del problema, por lo que calculando el mínimo común múltiplo de los denominadores $mcm\ (1813071, 604357, 5439213) = 5439213$, de manera que si llamamos $m = \tilde{t}/5439213$, observarmos que la solución es de la forma:

$$X = m \cdot (10366482, 7460514, 7358060, 4149387, 7206360, 4893246, 3515820, 5439213).$$

La complejidad de la resolución del problema procede de las últimas condiciones del mismo mencionadas entre las líneas 12-13, que constituyen la segunda parte del problema. Uno debe considerar que $x+y$ *es un cuadrado* y que $z+t$ *es un número triangular*. Usando la condición de que $x+y$ es *un cuadrado*: $x + y = m \cdot (10366482 + 7460514) = 17826996\ m = 2^2 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 29 \cdot 4657 \cdot m$ debe ser un cuadrado, de manera que $m = a \cdot v^2$, donde $a = 3 \cdot 11 \cdot 29 \cdot 4657$ y $v \in \mathbb{Z}_{>0}$. Usando esto último, tenemos que la solución al problema es de la forma:

(4.2)
$$X = v^2 \cdot (46200808287018, 33249638308986, 18492776362863, 32793026546940, 32116937723640, 21807969217254, 24241207098537, 15669127269180).$$

Por último, para usar la condición de que $z + t$ es un número triangular, usamos el siguiente resultado:

Lema 4.1. *x es un número triangular si y solo si $8x + 1$ es un cuadrado.*

Demostración. Supongamos que x un número triangular, entonces puede escribirse como $x = \frac{n\,(n+1)}{2}$, para un cierto $n \in \mathbb{N}$. Entonces $8x + 1 = (2n + 1)^2$.

Por otro lado si $8x + 1 = m^2$, entonces m es impar y se tendrá $8x + 1 = (2n + 1)^2$ de manera que $x = \frac{n\,(n+1)}{2}$. □

Dado que $z + t = m\ (7358060 + 4149387) = 11507447\ m = 7 \cdot 353 \cdot 4657 \cdot m = 7 \cdot 353 \cdot 4657 \cdot a \cdot v^2$, utilizando el resultado del Lema 4.1, deducimos que $u^2 = 8\ (z + t) + 1 = 8 \cdot 7 \cdot 353 \cdot 4657 \cdot a \cdot v^2 + 1$, lo cual se reduce a la siguiente ecuación de Pell:

(4.3)
$$u^2 = dv^2 + 1.$$

donde $d = 2^3 \cdot 7 \cdot 353 \cdot 4657^2 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 29 = 410286423278424$.

4.2. Resolución del Problema del Ganado con ecuaciones de Pell

Buscamos la solución del Problema del Ganado que consiste en resolver la siguiente ecuación de Pell:

(4.4) $x^2 - dy^2 = 1$ donde $d = 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 29 \cdot 353 \cdot (2 \cdot 4657)^2 = 410286423278424$.

Siguiendo la metodología que empleó Amthor [1] para solucionar el problema, partimos de la observación de que d puede escribirse como $d = (2 \cdot 4657)^2\ d'$ donde d' es libre de cuadrados. Por tanto, si (u, v) es una solución de (4.4), $(u, 2 \cdot 4657\ v)$ lo es de $x^2 - d'y^2 = 1$. Esta afirmación es consecuencia de que si (u, v) es una solución de (4.4) entonces

$$u^2 - dv^2 = 1 \quad \Longrightarrow u^2 - dv^2 = u^2 + (2 \cdot 4657)^2\ d'v^2 = u^2 + d'\ (2 \cdot 4657\ v)^2 = 1.$$

Luego $(u, 2 \cdot 4657\ v)$ es solución de la ecuación de Pell para $d' = 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 29 \cdot 353 = 4729494$. Denotamos por $\epsilon = u_1' + v_1'\sqrt{d'}$ a la solución fundamental de la ecuación de Pell para d', el resto de soluciones vienen dadas de la forma $\epsilon^n = u_n' + v_n'\ \sqrt{d'}$. Por tanto, la resolución del Problema del Ganado se reduce a:

- Resolver la ecuación de Pell para d'.
- Encontrar la mínima potencia a la que hay que elevar la solución fundamental de la ecuación de Pell para d' para que v_n' sea divisible entre $2 \cdot 4657$. Observamos que $d' = 4729494$ es par, luego en cualquier solución (u', v') de $x^2 - d'y^2 = 1$, u'^2 debe ser impar y por tanto, u' es impar. Entonces $u'^2 \equiv 1 \pmod 8$, pues el cuadrado de un impar módulo 8 siempre cumple que es congruente con 1. Ahora:

  $$u'^2 - d'\ (v')^2 \equiv 1 \pmod 8 \Leftrightarrow 1 - d'\ (v')^2 \equiv 1 \pmod 8 \Leftrightarrow d'\ (v')^2 \equiv 0 \pmod 8,$$

  Como $d' \equiv 6 \pmod 8$, se tiene que $6\ (v')^2 \equiv 0 \pmod 8$. De lo que se deduce $2\ (v')^2 \equiv 0 \pmod 8$, en particular, $(v')^2 \equiv 4 \pmod 8$. De aquí obtenemos que v' es par. Por tanto, basta con encontrar la potencia n a la que elevamos la solución fundamental ϵ para que v_n' sea divisible entre 4657.

Para resolver la ecuación de Pell para d', usamos el método de fracciones continuas expuesto en la sección 3.5. La longitud del periodo de la expansión como fracción continua de $\sqrt{d'}$ es de $n = 92$ dígitos, que es par, luego para hallar la solución fundamental de la ecuacion $x^2 - d'y^2 = 1$ debemos calcular p_{92} y q_{92}. Para ello, usamos las recurrencias dadas en el Teorema 3.9 siendo éstas $p_i = a_i p_{i-1} + p_{i-2}$, $q_i = a_i q_{i-1} + q_{i-2}$, $i = 1, 2, 3, \ldots$. y con valores iniciales $p_0 = 1$, $p_{-1} = 0$, $q_0 = 0$ y $q_{-1} = 1$. La expansión como fracción continua es la siguiente:

$$\sqrt{d'} = \sqrt{4729494} = [2174, \overline{1, 2, 1, 5, 2, 25, 3, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 15, 1, 2, 16, 1, 2, 1, 1, 8, 6, 1, 21,}$$
$$\overline{1, 1, 3, 1, 1, 1, 2, 2, 6, 1, 1, 5, 1, 17, 1, 1, 47, 3, 1, 1, 6, 1, 1, 3, 47, 1, 1, 17, 1, 5, 1, 1, 6, 2, 2, 1, 1,}$$
$$\overline{1, 3, 1, 1, 21, 1, 6, 8, 1, 1, 2, 1, 16, 2, 1, 15, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 3, 25, 2, 5, 1, 2, 1, 4348}].$$

Podemos también calcular los valores de (p_{92}, q_{92}) truncando la expansión justo antes de 4348, que es el último número del periodo, de donde se obtiene el número racional:

$$\frac{1099319867328297349798662328214335439010880 49}{5054948523431503307447781973554040898634 0} = \frac{p_{92}}{q_{92}}.$$

De manera que, aplicando el resultado del Corolario 3.29, obtenemos la solución fundamental de la ecuación de Pell para d', siendo ésta $(u_1', v_1') = (p_{92}, q_{92})$:

$$u_1' = 1099319867328297349798662328214335439010880 49.$$
$$v_1' = 5054948523431503307447781973554040898634 0.$$

Es decir, la solución fundamental es la siguiente:

$$\epsilon = u_1' + v_1'\sqrt{d'} = 109931986732829734979866232821433543901088049+ \\ 50549485234315033074477819735540408986340\sqrt{4729494}.$$

En este sentido, el resto de soluciones a esta ecuación de Pell vienen dadas de la forma u_n' y v_n' donde $\epsilon^n = u_n' + v_n'\sqrt{d'}$. Ahora nos falta encontrar el valor de la potencia n para el cual ϵ^n nos permita obtener v_n' tal que sea divisible entre 4657.

4.2.1. Aritmética modular

Con el fin de encontrar la potencia de la solución fundamental que da lugar a la solución a la ecuación de Pell que buscamos, vamos a trabajar con $\mathbb{F}_{4657}(\sqrt{2639})$ donde $\mathbb{F}_{4657} := \mathbb{Z}/4657\mathbb{Z}$ y como 4657 es un número primo, $\mathbb{F}_{4657}$ es un cuerpo finito. Dado que $d' \equiv 4729497 \equiv 2639 \pmod{4657}$ y $\left(\frac{2639}{4657}\right) = -1$, donde $\left(\frac{p}{q}\right)$ denota, en este caso, el símbolo de Legendre, es decir, 2639 no es un cuadrado módulo 4657, podemos considerar la extensión cuadrática de cuerpos:

$$\mathbb{F}_{4657} \hookrightarrow \mathbb{F}_{4657}(\sqrt{2639}) = \{a + b\sqrt{2639} : a, b \in \mathbb{F}_{4657}\}.$$

Al tratarse de un cuerpo todas las operaciones aritméticas, incluida la división entre elementos del cuerpo, están bien definidas. De esta forma,

$$\epsilon \equiv 4406 + 3051\ \sqrt{2639} \pmod{4657}.$$

Sea $p = 4657$ y $d' \equiv 4729497 \equiv 2639 \pmod{4657}$. Fijamos un cierto k de manera que $\epsilon^k = u_k' + v_k'\sqrt{d'}$. Como $\epsilon^k\ (u_k' - v_k'\sqrt{d'}) = 1$, entonces $\frac{1}{\epsilon^k} = u_k' - v_k'\sqrt{d'}$. Esta última igualdad implica que:

$$\epsilon^k - \frac{1}{\epsilon^k} \equiv 0 \pmod{4657}, \tag{4.5}$$

dado que $\epsilon^k - (u_k' - v_k'\sqrt{d'}) \equiv u_k' + v_k'\sqrt{d'} - u_k' + v_k'\sqrt{d'} \equiv 2v_k'\sqrt{d'} \equiv 0 \pmod{4657}$, pues buscamos k tal que $p = 4657 \mid v_k'$, es decir, que $v_k' \equiv 0 \pmod{4657}$. De esta forma podemos comprobar que buscamos k que verifique que:

$$\epsilon^{2k} \equiv 1 \pmod{4657}. \tag{4.6}$$

Es decir, $\epsilon^{2k} \equiv 1$ en el cuerpo $\mathbb{F}_{4657}(\sqrt{2639})$. Por otro lado, $\mathbb{F}_{4657}(\sqrt{2639})$ es un cuerpo de 4657^2 elementos, por lo tanto $\alpha^{4657^2-1} = 1$ en este cuerpo, ya que el grupo multiplicativo tiene orden $p^2 - 1 = 4657^2 - 1$. Por tanto, k debe ser divisor de $\frac{p^2-1}{2}$ (tomando potencias modulares $\epsilon^{2k} \pmod{p}$). El siguiente resultado permite buscar k entre los divisores de $\frac{p+1}{2}$. Esta idea es debida a H. W. Lenstra, Jr.:

Lema 4.2. *Dado p primo, entonces $\epsilon^{p+1} \equiv 1 \pmod{p}$.*

Demostración. Para demostrar esta última reducción, observamos que en el cuerpo finito en el que estamos trabajando, $x^{4657} \equiv x' \pmod{4657}$ donde si $x = a + b\ \sqrt{2639}$,

entonces $x' = a - b\sqrt{2639}$ (en este cuerpo finito). Esta igualdad se debe a que:

$$x^p \equiv \sum_{j=0}^{p} \binom{p}{j} a^j \ (b\sqrt{d'})^{p-j} \equiv a^p + (b\sqrt{d'})^p \equiv a^p + b^p(\sqrt{d'})^p \equiv a^p + (d')^{\frac{p-1}{2}}\sqrt{d'}b^p$$
$$\equiv a + \left(\frac{d'}{p}\right) \sqrt{d'}b \equiv a + (-1)\sqrt{d'}b \equiv a - b\sqrt{d'} \pmod{p}.$$

donde hemos usado que:

- $\binom{p}{j}$ es divisible por p para $j = 1, \ldots, p-1$.
- Dado que p es primo, $x^p \equiv x \pmod{p}$ para todo x (Pequeño Teorema de Fermat).
- Aplicando el criterio de Euler, el cual me dice que:

$$\left(\frac{x}{p}\right) \equiv x^{\frac{p-1}{2}} \pmod{p}$$

  donde $\left(\frac{x}{p}\right)$ denota el símbolo de Legendre, tenemos que $(d')^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1 \pmod{p}$ cuando $\left(\frac{d'}{p}\right) = -1$.

Por tanto, $\epsilon^p \equiv u - v\sqrt{2639} \pmod{p}$ y esto implica que $\epsilon^{p+1} \equiv (u + v\sqrt{2639})(u - v\sqrt{2639}) \pmod{p} \equiv 1 \pmod{p}$ pues $u^2 - v^2 d' = 1$, con lo que queda demostrada la reducción de Lenstra. □

Por tanto, como siempre se cumple que $\epsilon^{p+1} \equiv 1 \pmod{p}$ y busco un k tal que $\epsilon^{2k} \equiv 1 \pmod{p}$, debe ser k divisor de $(p+1)/2$.

4.2.2. Solución

Sea $\gamma = \epsilon^2 \pmod{4657}$ por lo tanto, $\gamma = 262 + 551\sqrt{2639}$. Buscamos que $\gamma^k \equiv 1 \pmod{4657}$ con k divisor de $(p+1)/2$. Como $\frac{p+1}{2} = \frac{4658}{2} = 17 \cdot 137$, sólo hay 3 casos que comprobar, concluimos que $k = 2329$. Por tanto, cualquier solución de $\epsilon^{2k} \equiv 1 \pmod{p}$ es de la forma $k = 2329\ n,\ n = 1, 2, 3, \ldots$
De esta forma, toda solución de $x^2 - d'y^2 = 1$ viene dada por $u' = \alpha_n$, $v' = \beta_n$ donde:

$$\epsilon^{2329n} = \alpha_n + \beta_n\sqrt{d'}, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Recordando que si (u, v) es solución de $x^2 - dy^2 = 1$ entonces $(u, 2 \cdot 4657 \cdot v)$ es solución de $x^2 - d'y^2 = 1$, nos queda que la solución que buscamos para $x^2 - dy^2 = 1$ es de la forma: $(u, v) = (\alpha_n, \frac{\beta_n}{2 \cdot 4657})$.
Llamo $\alpha = \epsilon^{2329n} = \alpha_n + \beta_n\sqrt{d'}$. Usando que $\frac{1}{\alpha} = \alpha'$, nos queda que:

$$\frac{1}{2\sqrt{d'}}\left(\alpha - \frac{1}{\alpha}\right) = \frac{1}{2\sqrt{d'}}\left(\alpha - \alpha'\right) = \frac{2\sqrt{d'}\ \beta_n}{2\sqrt{d'}} = \beta_n.$$

Es decir,

$$\beta_n = \frac{1}{2\sqrt{d'}}\left(\epsilon^{2329n} - \frac{1}{\epsilon^{2329n}}\right)$$

Por lo tanto, dado que $v^2 = \left(\frac{\beta_n}{2\cdot 4657}\right)^2 =$ tenemos:

$$v^2 = \frac{1}{(2\cdot 4657)^2}\left(\frac{1}{2\sqrt{d'}}\left(\epsilon^{2329n} - \frac{1}{\epsilon^{2329n}}\right)\right)^2 = \frac{1}{2^2\cdot 4657^2\cdot 4\cdot d'}\left(\epsilon^{2329n} - \frac{1}{\epsilon^{2329n}}\right)^2 =$$
$$= \frac{1}{4d}\left((\epsilon^{2329n})^2 + \left(\frac{1}{\epsilon^{2329n}}\right)^2 - 2\epsilon^{2329n}\frac{1}{\epsilon^{2329n}}\right) = \frac{1}{4d}\left(\epsilon^{4658n} + \frac{1}{\epsilon^{4658n}} - 2\right),$$

donde $d = 2^2\cdot 4657^2\cdot d' = 410286423278424$. Usando este valor en la solución del sistema de ecuaciones lineales (4.2), nos queda que:

$$X = \left(\frac{159}{5648}, \frac{801}{39536}, \frac{395}{19768}, \frac{891}{79072}, \frac{128685}{6575684}, \frac{2446623}{184119152}, \frac{125565}{13151368}, \frac{5439213}{368238304}\right)\cdot$$
$$\cdot\left(\epsilon^{4658n} + \frac{1}{\epsilon^{4658n}} - 2\right).$$

Dado que:

$$-1 < \frac{159}{5648}\left(\frac{1}{\epsilon^{4658n}} - 2\right) < 0 \implies x = \lceil\frac{159}{5648}\,\epsilon^{4658n}\rceil,$$

donde $\lceil x\rceil = min\,\{z\in\mathbb{Z} : x\le z\}$. Así nos queda que la solución al sistema es:

(4.7)
$$\lceil\left(\frac{159}{5648}, \frac{801}{39536}, \frac{395}{19768}, \frac{891}{79072}, \frac{128685}{6575684}, \frac{2446623}{184119152}, \frac{125565}{13151368}, \frac{5439213}{368238304}\right)\cdot\left(\epsilon^{4658n}\right)\rceil.$$

Con todo esto, sumando todos los animales, tendríamos que el tamaño del ganado es:

$$\lceil\frac{25194541}{184119152}\epsilon^{4658n}\rceil.$$

Ahora habría que aproximar cúanto vale dicha solución para $n = 1$. Usamos una aproximación del valor de $\epsilon \approx 219863973465659469959732465642867087802176097,99...$, uno tiene que $\epsilon^{4658} \approx 5,67112768854253101480996977723824477390782365262860627264119\cdot 10^{206545}$.

Usando esto en (4.7) con $n = 1$ tenemos una aproximación de la solución completa del problema más pequeña:

$(1, 596510804671144531435526194371248086139065086345517700690 42,$
$1, 14897138772828999971235982182513002425641611335378228055078 8,$
$0, 63903464823090286500855967618363973259205165855069913356476 4,$
$1, 13319275443863807711955587920331175925414323289574032663560 8,$
$1, 10982989237331903972396021582530962365333900889780013485263 5,$
$0, 75359414205454263981442911958968647343502218761387509348230 1,$
$0, 83767688241852443869222198410845833874526793424197933004904 1,$
$0, 54146089457145667802361994210710262615701718402398210332506 2) \cdot 10^{206544}.$

Concluimos que el número total del ganado es aproximadamente:

$$7,76027140648681826953023283321388666423232240592337610315062\cdot 10^{206544}.$$

APÉNDICE A
Problema de Wurm

Interpretemos el Problema del Ganado de una forma distinta. Si llamamos x al número de toros blancos e y al número de toros negros y suponemos que la condición de que $x + y$ es un cuadrado se refiere a que los toros forman una figura cuadrada, como un toro es más largo que ancho, simplemente estaríamos pidiendo que $x+y$ fuese un número rectangular, es decir, un número que no es primo, y en consecuencia, nos estaríamos enfrentando a la resolución de un problema que se atribuye a J.F. Wurm [13]. Recordamos que la resolución de la primera parte del problema se traduce en que, si llamamos x, y, z, t al número de toros blancos, negros, moteados y amarillos y denotamos por $\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}, \tilde{t}$ al número de vacas de los mismos colores, la solución al sistema viene dada por la siguiente igualdad:

(A.1)
$$X = m\,(10366482, 7460514, 7358060, 4149387, 7206360, 4893246, 3515820, 5439213),$$

donde X es el vector de las soluciones y $m \in \mathbb{Z}$. Si atendemos a la interpretación de Wurm, la resolución de la segunda parte del problema consiste encontrar un m entero para el cual se satisfaga que $z+t$ es un número triangular y que además, $x+y$ pueda escribirse como producto de dos números cuya relación sea aproximadamente la existente entre el largo y ancho de un toro. Dado que debe ser que $z + t$ sea un número triangular y por el lema (4.1), esto sucede si y solo si se da que

(A.2)
$$8\,(z+t) + 1 = 8 \cdot 1150744\; m + 1 = 92059576\; m + 1 = a^2,$$

para un cierto entero a, lo que se traduce en que $a^2 \equiv 1 \pmod{92059576}$. Para encontrar el valor de tal x, usamos el Teorema Chino del Resto, el cual nos dice que existe una solución de $x^2 \equiv 1 \pmod{92059576}$ para cada combinación de soluciones de la ecuación:

(A.3)
$$x^2 \equiv 1 \pmod{d},$$

donde d es una potencia de primo que divide a $92059576 = 2^3 \cdot 7 \cdot 353 \cdot 4657$. Las soluciones de (A.3) vienen dadas por $x \equiv 1, 3, 5, 7 \pmod 8$ y $x \equiv \pm 1 \pmod d$ para $d = 7 \cdot 353$ y 4657. Las soluciones $\pmod{92059576}$ se construyen a partir de ellas y

la lista completa de las soluciones positivas es la siguiente.

$$3287843, 4303069, 7590911, 15423983, 18711825, 19727051, 23014893, 23014895,$$
$$26302737, 27317963, 30605805, 38438877, 41726719, 42741945, 46029787, 46029789,$$
$$49317631, 50332857, 53620699, 61453771, 64741613, 65756839, 69044681, 69044683,$$
$$72332525, 73347751, 76635593, 84468665, 87756507, 88771733, 92059575.$$

Observamos que cada uno de estos números genera una familia de soluciones distinta. Vamos a estudiar el caso más pequeño, es decir, el caso en el que $a = 3287843$. Volviendo hacia atrás, en (A.2) teníamos que 92059576 $m + 1 = a^2$ de manera que, sustituyendo por el valor de a que hemos obtenido y despejando m nos queda que $m = 117423$. Sustituyendo tal valor en (A.1), obtenemos que la solución al problema es la siguiente:

$$X = (1217263415886, 876035935422, 487233469701, 864005479380, 846192410280,$$
$$574579625058, 638688708099, 412838131860).$$

Sumando todos los animales, obtenemos que el tamaño del rebaño es 5916837175686. Además, $z + t = 573634017639 = \frac{1643921 \cdot 1643922}{2}$, de manera que se cumple que $z + t$ es un número triangular.
Por otro lado, $x + y = 2093299351308 = 2^2 \cdot 3^4 \cdot 11 \cdot 29 \cdot 4349 \cdot 4657$, que no es primo, luego se cumple la propiedad que buscábamos, es decir, $x + y$ es un número rectangular. La representación de este número más parecida a un cuadrado viene dada por $x + y = 1409076 \cdot 1485583$ por lo que llegamos a que la relación entre el largo y el ancho de un toro es en torno a 1485583/1409076, un número muy próximo a 1. Esto nos llevaría a un hecho muy poco común, pues son proporciones disparatadas para tratarse de un toro, lo cual nos lleva a pensar, como comentábamos en la introducción, que la verdadera interpretación del problema es la que nos lleva a su resolución utilizando la ecuación de Pell.

APÉNDICE B
Definiciones de Teoría Algebraica de Números

En este apéndice, desarrollamos algunas propiedades y definiciones fundamentales para el entendimiento del capítulo de este Trabajo de Fin de Grado acerca de cuerpos cuadráticos y su relación con las ecuaciones de Pell 2. Para ello, requerimos de conceptos propios de Teoría Algebraica de Números.

Definición B.1. Decimos que K es un **cuerpo de números** si se cumple que K es una extensión finita algebraica de $\mathbb{Q}$, de manera que $[K : \mathbb{Q}] = dim_{\mathbb{Q}} K$ y se tiene que $[K : \mathbb{Q}] < \infty$.

Definición B.2. Sea $\alpha \in \mathbb{C}$. Decimos que α es un **número algebraico** si es el cero o raíz de algún polinomio $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$, es decir, si existe $f(x) \in \mathbb{Q}[x], f(x) \neq 0$ tal que $f(\alpha) = 0$ si y solo si $[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}] < \infty$.

Teorema B.3. *Un número algebraico α es el cero de un único polinomio mónico irreducible (sobre $\mathbb{Q}$) $g(x) \in \mathbb{Q}[x]$. Además, si $h(x) \in \mathbb{Q}[x]$ y $h(\alpha) = 0$, entonces $g(x) \mid h(x)$ en $\mathbb{Q}$. Al polinomio $g(x)$ lo llamamos polinomio mínimo de α. El grado de α es el grado de su polinomio mínimo.*

Definición B.4. Llamamos **cuerpo de números algebraicos** al conjunto formado por todos los números algebraicos, es decir, $\overline{\mathbb{Q}} = \{\alpha \in \mathbb{C} : \alpha \text{ es algebraico}\}$. Tal conjunto es un cuerpo.

Definición B.5. Un **número algebraico** α es un entero algebraico si α es el cero de un polinomio mónico $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$.

Notación. $A = \{\alpha \in \mathbb{C} : \alpha \text{ es entero algebraico}\}$.

Definición B.6. Sea K cuerpo de números. El **anillo de enteros** del cuerpo K es $\mathcal{O}_K = K \cap A$. que es un anillo por ser la intersección de un cuerpo con un anillo.

Lema de Gauss. Sea $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$. Si $f(x) = g(x)\ h(x)$ con $g(x), h(x) \in \mathbb{Q}[x]$, entonces $g(x), h(x) \in \mathbb{Z}[x]$.

Teorema B.7. $\mathcal{O}_{\mathbb{Q}} = \mathbb{Z}$

Demostración del Teorema B.7. $\mathbb{Z} \subset \mathcal{O}_{\mathbb{Q}}$ pues si $m \in \mathbb{Z}$, entonces m es el cero de $f(x) = x - m$ luego m es un entero algebraico y como $m \in \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ y $m \in A$ entonces $m \in \mathcal{O}_{\mathbb{Q}}$. Veamos que no puede haber ningún elemento más en $\mathcal{O}_{\mathbb{Q}}$. Para que $m \in \mathcal{O}_{\mathbb{Q}}$ necesariamente, m debe pertenecer a $\mathbb{Q}$ pues $\mathcal{O}_{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q} \cap A$ de manera que tomo $q \in \mathbb{Q}$ tal que $q \neq \mathbb{Z}$ que satisface que existe $f(x)$ con $f(q) = 0$. Sea $g(x)$ el polinomio mínimo de q, en tal caso, $g(x) \mid f(x)$ y por lo tanto, $f(x) = g(x)\ h(x) \in \mathbb{Q}[x]$ (pues $g(x) = x - q$) y por el Lema de Gauss, necesariamente $g(x) \in \mathbb{Z}[x]$, luego $q \in \mathbb{Z}$. □

Simultáneamente con esta demostración hemos probado el siguiente resultado:

Teorema B.8. *El polinomio mínimo de un entero algebraico es mónico con coeficientes enteros.*

Definición B.9. Un cuerpo de números K es un **cuerpo (de números) cuadrático** cuando $K = \mathbb{Q}(\alpha)$ donde α es de grado 2, es decir, el polinomio mínimo de α tiene grado 2.

Definición B.10. Sea $\alpha \in \mathcal{O}_K$ no nulo. Decimos que α es una **unidad** de $\mathcal{O}_K$ si existe $\beta \in \mathcal{O}_K$ tal que $\alpha\beta = 1$.

Procedemos a dar algunas definiciones claves relacionadas con cuerpos de números cuadráticos. Nótese que son también definiciones que pueden entenderse para cuerpos de números de cualquier grado, sin embargo, en nuestro caso, analizaremos los cuerpos cuadráticos. Demostramos el resultado recogido en la Observación 2.1 expuesta en el capítulo de cuerpos cuadráticos.

Demostración. Observamos que α es el cero de algún polinomio irreducible $p(x) = ax^2 + bx + c,\ a, b, c, \in \mathbb{Z}$. Entonces:

$$\alpha = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}.$$

Nos queda $D = b^2 - 4ac \in \mathbb{Z}$. Además, $\sqrt{D} \notin \mathbb{Q}$, pues $p(x)$ es irreducible en $\mathbb{Q}$ y al ser un polinomio de grado dos, no tiene raíces racionales y por tanto, $\sqrt{D}$ no puede ser racional. Por tanto, si escribimos D como $D = f^2 D_0$ donde D_0 es libre de cuadrados, entonces $K = \mathbb{Q}(\alpha) = \mathbb{Q}(\sqrt{D_0})$. □

Definición B.11. Sea $K = \mathbb{Q}(\sqrt{D_0})$ cuerpo de números cuadrático con D_0 libre de cuadrados. Sea $\alpha = \frac{c_1 + c_2\sqrt{D_0}}{c_3} \in K$ con $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{Z}, c_3 \neq 0$. Definimos el **conjugado** de α, denotado por α', como $\alpha' = \frac{c_1 - c_2\sqrt{D_0}}{c_3}$. Llamamos **traza** de α a $T(\alpha) = \alpha + \alpha' = \frac{2c_1}{c_3}$, la **norma** de α como $N(\alpha) = \alpha \cdot \alpha' = \left(\frac{c_1}{c_3}\right)^2 - D_0\left(\frac{c_2}{c_3}\right)$.

Proposición B.12. Sea $K = Q(\sqrt{D_0})$ cuerpo de números cuadrático y sea $\alpha \in \mathcal{O}_K$. Entonces $T(\alpha), N(\alpha) \in \mathbb{Z}$.

Demostración. Sea $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ el polinomio mínimo de α. Entonces $f(x) = x^2 - T(\alpha)\ x + N(\alpha)$ (pues el coeficiente que acompaña al primer término del polinomio es la suma de las raíces, es decir, $\alpha + \alpha'$ y el término independiente es el producto de ambas) y por tanto, como el polinomio mínimo de un entero algebraico tiene coeficientes enteros, necesariamente $T(\alpha), N(\alpha) \in \mathbb{Z}$. □

APÉNDICE C

Algunas demostraciones del capítulo 3

Demostración del Teorema 3.9. Probamos en primer lugar que las recurrencias dadas en (3.7) $p_i = a_i p_{i-1} + p_{i-2}$, $q_i = a_i q_{i-1} + q_{i-2}$, son ciertas para todo $i = 1, 2, 3, \ldots$, con los valores iniciales dados en (3.8). Analicemos el caso para $i = 1, 2, 3$.

$$c_1 = a_1 = \tfrac{p_1}{q_1}, \qquad c_2 = [a_1, a_2] = \tfrac{a_1 a_2 + 1}{a_2} = \tfrac{p_2}{q_2},$$

$$c_3 = [a_1, a_2, a_3] = \tfrac{a_1 a_2 a_3 + a_1 + a_3}{a_2 a_3 + 1} = \quad \tfrac{a_3(a_1 a_2 + 1) + a_1}{a_2 a_3 + 1} = \tfrac{a_1 a_2 a_3 + a_1 + a_3}{a_2 a_3 + 1} = \tfrac{a_3(p_2) + p_1}{q_2 a_2 + q_1} = \tfrac{p_3}{q_3},$$

de manera que $p_2 = a_1 a_2 + 1$ y $q_2 = a_2$. En tal caso, vemos que $p_3 = a_3 p_2 + p_1$ y $q_3 = q_2 a_3 + q_1$. Con esto, procedemos a demostrar la recurrencia por inducción. Asumamos que la fórmula es cierta para i, es decir:

$$c_i = [a_1, \ldots, a_i] = \frac{p_i}{q_i} = \frac{a_i p_{i-1} + p_{i-2}}{a_i q_{i-1} + q_{i-2}}, \tag{C.1}$$

y veamos que también lo es para $i+1$, de manera que, queremos probar que es cierta la siguiente igualdad:

$$c_{i+1} = [a_1, \ldots, a_{i+1}] = \frac{p_{i+1}}{q_{i+1}} = \frac{a_{i+1} p_i + p_{i-1}}{a_{i+1} q_i + q_{i-1}}. \tag{C.2}$$

Veamos la relación entre $c_i = [a_1, \ldots, a_i]$ y $c_{i+1} = [a_1, \ldots, a_{i+1}]$. Comparando, vemos que c_{i+1} solo difiere de c_i en $a_i + \frac{1}{a_{i+1}}$ en lugar de a_i. Esto sugiere que podemos calcular la fórmula de c_{i+1} a partir de la de c_i dada en (C.1). Procedemos a calcular c_{i+1}. En la expresión (C.1) reemplazamos a_i por $a_i + \frac{1}{a_{i+1}}$:

$$c_{i+1} = \left[a_1, \ldots, a_{i-1}, a_i + \frac{1}{a_{i+1}}\right] = \frac{\left(a_i + \frac{1}{a_{i+1}}\right) p_{i-1} + p_{i-2}}{\left(a_i + \frac{1}{a_{i+1}}\right) q_{i-1} + q_{i-2}}.$$

Multiplicando numerador y denominador por a_{i+1} y reordenando términos obtenemos:

$$c_{i+1} = \frac{a_{i+1}(a_i p_{i-1} + p_{i-2}) + p_{i-1}}{a_{i+1}(a_i q_{i-1} + q_{i-2}) + q_{i-1}}.$$

Como asumimos que (C.1) es cierto para i, tenemos que $p_i = a_i p_{i-1} + p_{i-2}$, $q_i = a_i q_{i-1} + q_{i-2}$, de manera que los términos entre paréntesis en el numerador y denominador de la última expresión para c_{i+1} pueden reemplazarse, respectivamente, por p_i y q_i y así obtenemos que:

$$c_{i+1} = \frac{a_{i+1}p_k + p_{i-1}}{a_{i+1}q_i + q_{i-1}} = \frac{p_{i+1}}{q_{i+1}}.$$

Por tanto, hemos probado que la igualdad también es cierta para $i+1$. Así queda probada la recurrencia (3.7) dada en el Teorema. Pasamos ahora a demostrar (3.9). Cuando $i = 2$ tenemos $p_2q_1 - p_1q_2 = (a_1a_2 + 1) \cdot 1 - a_1a_2 = 1 = (-1)^2$. Supongamos que el resultado es cierto para i y con inducción veamos que entonces también lo es para $i+1$. Usando (3.7) sabemos que se cumple que $p_{i+1} = a_{i+1}p_i + p_{i-1}$ y $q_{i+1} = a_{i+1}q_i + q_{i-1}$. Por tanto, podemos escribir:

$$p_{i+1}q_i - p_iq_{i+1} = (a_{i+1}p_i + p_{i-1})\, q_i - p_i\,(a_{i+1}q_i + q_{i-1}) = (-1)\,(p_iq_{i-1} - p_{i-1}q_i) = \\ = (-1)(-1)^i = (-1)^{i+1}.$$

Esto completa la demostración de (3.9). Finalmente, pasamos a probar la última parte del Teorema. Para demostrar la primera igualdad de (3.10), partimos de que por (3.9) $p_iq_{i-1} - p_{i-1}q_i = (-1)^i$, de manera que dividiendo entre q_iq_{i-1} queda demostrado lo que buscábamos. Para demostar la segunda igualdad de (3.10), hacemos lo siguiente:

$$c_i - c_{i-2} = \frac{p_i}{q_i} - \frac{p_{i-2}}{q_{i-2}} = \frac{p_iq_{i-2} - p_{i-2}q_i}{q_iq_{i-2}}.$$

Desarrollando el numerador y aplicando las igualdades demostradas en (3.7) $p_i = a_ip_{i-1} + p_{i-2}$ $q_i = a_iq_{i-1} + q_{i-2}$ y (3.9) $p_iq_{i-1} - p_{i-1}q_i = (-1)^i$ nos queda que $p_iq_{i-2} - p_{i-2}q_i = (a_ip_{i-1} + p_{i-2})q_{i-2} - p_{i-2}(a_iq_{i-1} + q_{i-2}) = a_i\,(p_{i-1}q_{i-2} - p_{i-2}q_{i-1}) = (-1)^{i-1}$, como queríamos probar. □

Demostración Corolario 3.13. Definimos $\lfloor x_i \rfloor = a_i$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Dado que $c_1 = a_1 < x$ y que $a_2 = \lfloor x_2 \rfloor < x_2$ tenemos que $x = a_1 + \frac{1}{x_2} < a_1 + \frac{1}{x_2} = c_2$. Por tanto $c_1 < x < c_2$. Supongamos, por inducción, que el resultado es cierto para los convergentes $d_1, \ldots, d_{2k}$ de cualquier fracción continuas $[b_1, \ldots, b_n, \ldots]$ asociada a un cierto número z, es decir supongamos que $d_{2k-1} < z < d_{2k}$, y apliquemos esta hipótesis a la fracción $[a_2, \ldots, a_n, \ldots]$ asociada a x_2. Tendremos entonces $d_{2k-1} < x_2 < d_{2k}$. Ahora, observemos que $c_j = a_1 + \frac{1}{d_{j-1}}$ para todo $j \geq 2$ y por tanto, $c_{2k+1} = a_1 + \frac{1}{d_{2k}} < a_1 + \frac{1}{x_2} = x < a_1 + \frac{1}{d_{2k-1}} = c_{2k}$. Evidentemente, la condición $c_{2k+1} < x < c_{2k}$ para todo k implica que $\lim_{k\to\infty} c_{2k} + 1 \leq x \leq \lim_{k\to\infty} c_{2k}$ y por tanto $\lim_{k\to\infty} c_k = x$. □

Demostración Proposición 3.17. Probamos por inducción. Para el caso $n = 1$, usando los valores iniciales dados en (3.8):

$$\alpha = \frac{\alpha_2 p_1 + p_0}{\alpha_2 q_1 + q_0} = \frac{\alpha_2 a_1 + 1}{\alpha_2} = a_1 + \frac{1}{\alpha_2} = [a_1, \alpha_2].$$

Ahora suponemos que (3.11) es cierta para n y veamos que también lo es para $n+1$.

$$[a_1,\dots,a_n,a_{n+1},\alpha_{n+2}] = \left[a_1,\dots,a_n,a_{n+1}+\frac{1}{\alpha_{n+2}}\right] =$$
$$= \frac{\left(a_{n+1}+\frac{1}{\alpha_{n+2}}\right)p_n + p_{n-1}}{\left(a_{n+1}+\frac{1}{\alpha_{n+2}}\right)q_n + q_{n-1}} = \frac{\alpha_{n+2}\left(a_{n+1}p_n+p_{n-1}\right)+p_n}{\alpha_{n+2}\left(a_{n+1}q_n+q_{n-1}\right)+q_n} = \frac{\alpha_{n+2}p_{n+1}+p_n}{\alpha_{n+2}q_{n+1}+q_n}.$$

Con esto queda probado el teorema por inducción. □

Demostración Proposición 3.20. Probamos el apartado 1. de la proposición. Toda ecuación cuadrática $ax^2+bx+c=0$ tiene 2 raíces:

$$r_i = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = A \pm B\sqrt{D} \quad \text{donde } D = b^2-4ac,\ i \in \{1,2\}.$$

En consecuencia:

$$r_1 + r_2 = 2A = -\frac{b}{a}; \qquad r_1 r_2 = A^2 - B^2 D = \frac{c}{a}. \tag{C.3}$$

Por tanto, si $a \neq 0$, podemos reemplazar $ax^2+bx+c=0$ por:

$$x^2 - x\Big(-\frac{b}{a}\Big) + \frac{c}{a} = 0 \iff x^2 - 2A\,x + A^2 - B^2D = 0. \tag{C.4}$$

Recíprocamente, sustituyendo x por $A \pm B\sqrt{D}$ podemos probar que satisfacen la última ecuación:

$$(A \pm B\sqrt{D})^2 - 2A\,(A \pm B\sqrt{D}) + A^2 - B^2D =$$
$$= A^2 \pm 2AB\sqrt{D} + B^2D - 2A^2 \mp 2AB\sqrt{D} + A^2 - B^2D = 0.$$

Sin embargo, la ecuación (C.4) que satisfacen $A \pm B\sqrt{D}$ no tiene necesariamente coeficientes enteros. Para ello, multiplicando por a, siendo $a = (2A,\ A^2 - B^2D)$ obtenemos la ecuación cuadrática $ax^2+bx+c=0$ con $a>0$, $b=-2Aa$ y $c = a\,(A^2-B^2D)$ donde $a,b,c \in \mathbb{Z}$.
Finalmente el discriminante $b^2-4ac>0$ pues $b^2-4ac = (-2aA)^2 + 4a^2A\,(A^2 - B^2D) = 4a^2B^2D > 0$ y dado que D es libre de cuadrados, b^2-4ac también lo es.

Para demostrar el apartado 2. de la proposición, hacemos el siguiente razonamiento. Si $A+B\sqrt{D}$ es raíz de $g_1(x) = a_1x^2+b_1x+c_1 = 0$ y raíz de $g_2(x) = a_2x^2+b_2x+c_2 = 0$ entonces también será raíz de la ecuación $a_2g_1(x) - a_1g_2(x) = 0$, de manera que:

$$a_2g_1(x) - a_1g_2(x) = x\,(a_2b_1 - a_1b_2) + (a_2c_1 - a_1c_2) = 0.$$

Si $a_2b_1 - a_1b_2 \neq 0$, entonces $x = \frac{a_2c_1-a_1c_2}{a_2b_1-a_1b_2} \in \mathbb{Q}$, pero suponíamos que era irracional y por tanto, $x = A + B\sqrt{D}$ no puede satisfacer ambas ecuaciones.
Si $a_2b_1 - a_1b_2 = 0$, reordenando términos tenemos que $a_2\ b_1 = a_1\ b_2$ si y solo si

$\frac{a_2}{a_1} = \frac{b_2}{b_1}$. Por otro lado, si $a_2\ b_1 - a_1\ b_2 = 0$ necesariamente $a_2\ c_1 - a_1\ c_2 = 0$ y por tanto $a_2\ c_1 = a_1\ c_2$ si y solo si $\frac{a_2}{a_1} = \frac{c_2}{c_1}$, de manera que:

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{b_2}{b_1} = \frac{c_2}{c_1} = k \qquad \Longrightarrow \quad \begin{array}{r} a_2 = ka_1. \\ b_2 = kb_1. \\ c_2 = kc_1. \end{array}$$

Por tanto, $g_1(x)$ y $g_2(x)$ son equivalentes, siendo una ecuación múltipla de la otra. □

Demostración Teorema 3.24. Demostramos los dos subapartados de esta demostración:

1. *Una vez que un término se repite, toda la subsecuencia $\alpha, \alpha_1, \ldots, \alpha_l$ se repite, en otras palabras, si $\alpha_k = \alpha_l$ entonces $\alpha_{k+1} = \alpha_{l+1}, \alpha_{k+2} = \alpha_{l+2}, \ldots$.*
   Para demostar esta afirmación, partimos de que $\alpha_k = [a_{k+1}, \alpha_{k+1}]$ y $\alpha_l = [a_{l+1}, \alpha_{l+1}]$ y suponemos que $\alpha_k = \alpha_l$. Como $a_{k+1} = \lfloor \alpha_k \rfloor$ y $a_{l+1} = \lfloor \alpha_l \rfloor$ concluimos que $a_{l+1} = a_{k+1}$ y por lo tanto, $\frac{1}{\alpha_{l+1}} = \frac{1}{\alpha_{k+1}}$ lo cual implica que $\alpha_{l+1} = \alpha_{k+1}$. Iterando el argumento demostramos lo buscado.

2. *El primer término de la secuencia, α, se repite, en otras palabras, la secuencia $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \ldots$ es periódica pura.*
   Para demostar esta segunda afirmación, partimos de que $\alpha_k = \alpha_l$, usando conjugados en la igualdad obtenemos que $\alpha'_k = \alpha'_l$. Además,

   $$\beta_k = \frac{-1}{\alpha_k} = \frac{-1}{\alpha_l} = \beta_l \tag{C.5}$$

   Si $k \neq 0$, entonces $\alpha_{k-1} = a_k + \frac{1}{\alpha_k}$ y $\alpha_{l-1} = a_l + \frac{1}{\alpha_l}$. Tomando conjugados, $\alpha'_{k-1} = [a_k, \alpha'_k]$, $\alpha'_{l-1} = [a_l, \alpha'_l]$. Por tanto $\beta'_k = a_k - \alpha'_{k-1}$ y $\beta'_l = a_l - \alpha'_{l-1}$ donde $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \ldots$ son todos distintios y donde $\alpha_s = \alpha$ y a partir de ese punto, todos los $\alpha' s$ se repiten. Para cada $\alpha_k > 1$, existe exactamente un entero a_k menor que α_k y siendo este el más próximo a α_k (es decir, el valor de la parte entera de un número dado es única). Por tanto, como los $\alpha'_i s$ se repiten y $\lfloor \alpha'_i s \rfloor$ está determinada de manera única, está claro que la secuencia $a_1, \ldots, a_s$ se repetirá: $\alpha_s = [a_{s+1}, \alpha_{s+1}] = \alpha = [a_1, \alpha_1]$. De manera que la fracción continua para α tiene la forma: $\alpha = [\overline{a_1, \ldots, a_s}]$, es decir, es una fracción continua periódica pura.

□

Bibliografía

[1] Amthor, A.: Das problema bovinum des Archimedes, *Zeitschrift für Math. u. Physik (Hist. Litt. Abtheilung)*, **25** (1880), 153–171.

[2] Fraser, P.M.: Ptolemaic Alexandria, *Vol.1, The Clarendon Press, Oxford*, (1972), 407–408.

[3] Hillion, S.J.P. and Lenstra Jr, H.W.: Archimedes: The Cattle Problem, *English verse, Mercator, Santpoort*, (1999).

[4] Jacobson, M.J. and Williams, H. C.: Solving the Pell Equation, *Department of Computer Science University of Solving the Pell Equation. Springer*, (2009).

[5] Krumbiegel, B.: Das problema bovinum des Archimedes, *Zeitschrift für Math. u. Physik (Hist. Litt. Abtheilung)*, **25** (1880), 121–136.

[6] Lenstra Jr, H. W.: Solving the Pell equation, *Vol. 49, Notices Amer. Math. Soc. (AMS)*, **2** (2002), 182–192.

[7] LeVeque, W. J.: Fundamentals of Number Theory, *Addison-Wesley Publishing Company*, (1977).

[8] Marcus, D. A. and Sacco, E.: Number fields, *New York: Springer*, **2** (1977).

[9] Olds, C.D.: Continued Fractions, *Random House, United States*, **9** (1963).

[10] Thomas, I.: Greek Mathematical Works, *Vol. 2, Loeb Classical Library, Harvard University Press, Cambridge, MA*, (1980), 203-–206.

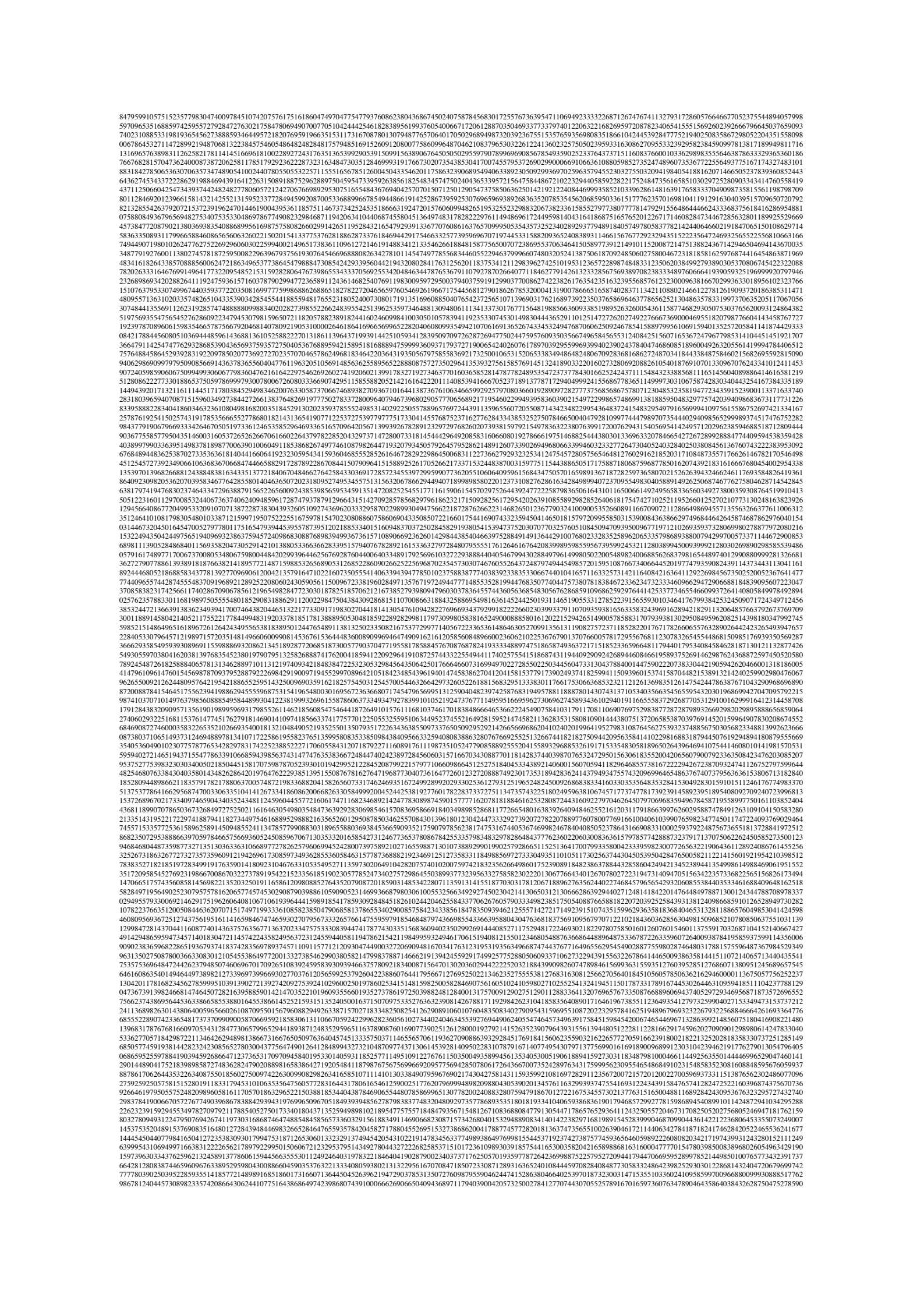
[11] Lozano-Robledo, A.: Number Theory and Geometry: An Introduction to Arithmetic Geometry, *American Mathematical Soc.*, **35** (2019).

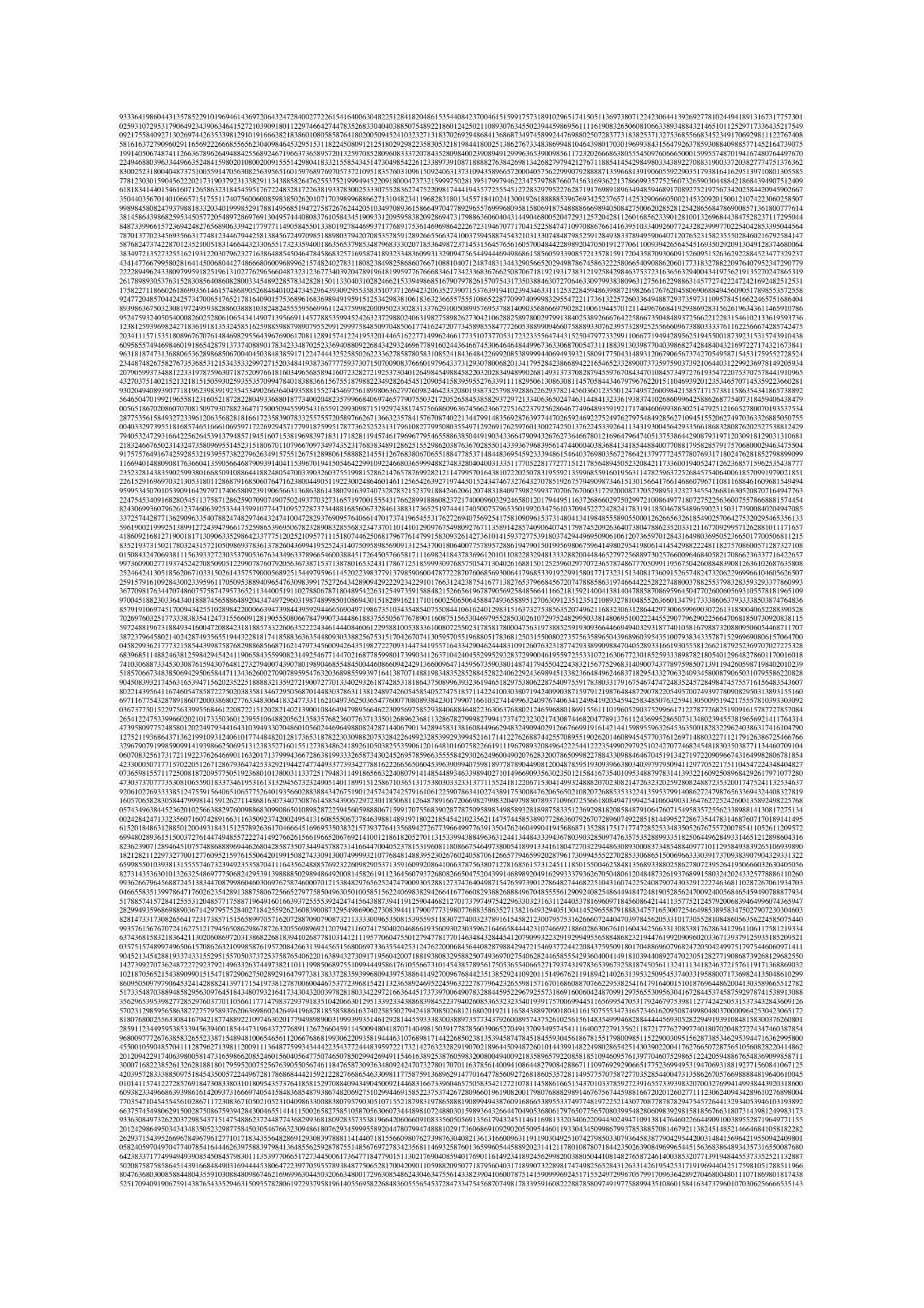
[12] Vardi, I.: Archimedes' Cattle Problem, *Vol. 105, The American mathematical monthly*, Taylor & Francis **4** (1998), 305–319.

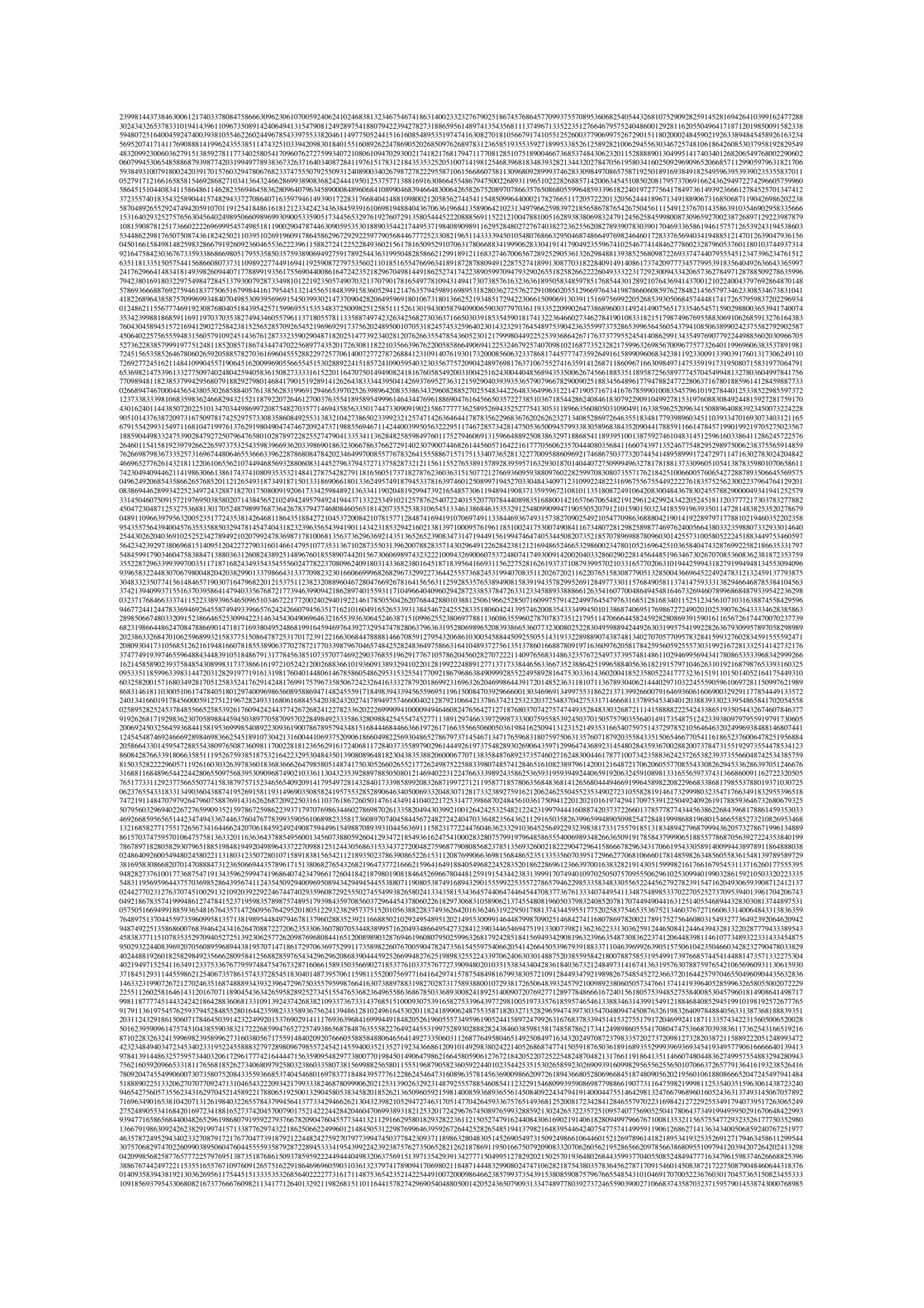
[13] Wurm J.F.: Review of J. G. Hermann's pamphlet: De Archimedis Problemate Bovino, *Leipzig, 1828, Jahrbücher für Philologie und Pädagogik*, **14** (1830), 194–202.

776027140648681826953023283321388666423232240592337610315061922690321593061406953194348955323833033238580023195089004703344094211982833508953446157558874364918967966655125464772584
5465104616027482769081922732732396247083767521718123833193071062059470897781028461513719299989868111868841692727856965734742675969833374086301327572518139903929524086753589751101633
038199595228622489897747679493477758862273723746255675090116296340679382452054261676932371219380212606631852813266328345233258182216126279820675226279382553204835331774536078819419
510012902535378907943077080222390477002712323982680054751070633312406401842494106264559135633570932873950709846825186508464899773410357848770231421207023187305429219598310950037546
619359116492266575520991844006671059444489935414661474017880964784212568417686213811881736706649486939349427478388044733984371799656338216395615067290682140459765856258954380106549
596389432316812462043510835506874178802215370487620735578787317123762036035001543668020475611971279587979515354611992021622996696816931387575159627207593603605773271221152829620797
794193624267440392635935320573979912232151674560564545791492924456171830301813667384589167056522577623089709143598292275630551090992443744816361683463507051783329274098023993328211
3029577370634856566784428734418907793760361976731821796313154035851932101054431032936246524861777259088896596831135843667028911733111185491846594977587665039791677109215889382268067
519946239720594300361698612324170432810168312071503448140574573971379173734887941315310023769828368113313780683053636451507250550342600937411864830010550157963495114816583555475876
795909042784483106585324414267249623707115372654601907558190199832272382845825509194548808552246369616821866714195657247590577717959340130295805375453087286637147911152992292430583
017874945989374799014385489851730545027438872255484774870525998174756569642869131042241359302693638651079384343892377483918246702715559197481664917719078658996467918569027185488680
124789279712254874017594618581868528257283706135422773378817030599492560088302394410793215355063580927771124011214123295052037600096981949326854188036550136546083512716790132485396
6909702273871469435937740222427279055349787187149531680694645206558469108171530344158158805189204777279720790073340967222669454716575804898227658488849221768729079022303105014329675
931430442948087405606943756464734224280653028629633513455238798675277501714679514560813407361520727159207670713365514125146616821713246052804253580354692552832004146606929976708643
146192388356248679220702804942508158827510833811737027398938543906895984983421187829875948093811480148364866938694981801959180560827623963753292272339543635991815106211803511957546
910708906420722186269317061459508277625181770918885962860179616995497679567615583773010184557338931935132304846980405465115011435382050691739737782337398023915537773848796886569485
631530075412865391722210014546268189028318111322633394122597318951253680213815794050467690954693585009146668250371740418526289757937086726254334879533507808931006202760224408823846
524143342928297591652150503803710746518147481415798789260517795736760819442330505052128581115577452444198189987408060435680476832971622382499245596970104107823466785925979304130003
248983200963786001650495836202635128452957043920506604712162234474467753613341290875259928046880740588571000851114962611542695596371137672911457641232791093384587363137287473467348
960974920336368145917816572262123008331492495671702737508884265990900006524146367057815744932843025784399435737746128409478703921462664343832297742834833934148498880856802246561758
932570315140927669468984482767036354380342292274181889504574737402373250480735139564724405734837611196305014196281826568107395704019498483251014298376714081869978272602947368085520
109670557981017985121455481919452622776639743397394980909539086124717712062997743485797927462913219814614182634877845953631430484254087161726921107684638767858056239525983326198898
527610533560728644236829876118675259931508946288190773131351758792333577828876930951258618268534576626447747593960220604648507751746493990211904641949699952377622607260751561998008
390839354443242718589036178492375042238055326093798580010551095407701998427396181101643367298936472730875646739010069851116670126530796492248660244242161594107431350615685186751444
882538007053459930080903500366024493378561159025593482100886214659590154290803360858357644324063589551193153118436678382713135348444862653447126123474294014063238790463120673939944
762025678623603660177149305634180217481135858331756787486669728961927180923753804369650828406141949670470589198848633507018177226649232088757566175686243635182902630643073790953111
640376257930958772541996540543979134446785761945990733812063829247284484575354196141898566999919341621466898705754204073855214464317341328647880246174395998332463583908008176823778
159913062386586869982892754807253251372306835600190879832866841005771105507178342886309881271537271555879665443763073184151377572719383956377643728981748779652885080350914223209944
789039437311877612523144105875472125364181200388012045889935322252414658037726972848446302970045365015202507998568203620878154641517617253841574846950338673426584532573326787313745
252341218480331651677059022426925394627764335501616679925858735800293799441897748206735276600670715294923929043000013307329558136578280519050451393287188477860068596996885744209510
403841693331334103242805627933647663375137202634213467545314772745476485050035331675071281156812810359944281123564108504655396135473001231307314689472444636965904943955304780628101
440160514123123302192776502691397214896002753772544721076928373781820300206364617442927407429851488734731592024228913856475465652091130062578994286605808589728021612762996464821974
506634977995636661008813635897378323859675859505281891163978514625872466884582895388517470092046129603481115712635514147809660559150539551495126550183058694283451419333796985515465
593159569767704670757877447176378958005254064236436665829829296171918756099625836379869652199657250449901878200278214965151420885922347310958010441291199097375401224725949943289184
824011397742521443530457905648845625229959577318487185063582872029052297467401227107334373390945590779916567080140365586026502006316851970382271684279470685919320769078720114429510
349234888351036253523745538009627261941911181491454530860149213337638964077400434193204521429802123908102758991105840545343558492449410349214053687994070091215848051155048555359535
993107468325773490394213085166819200044522887479553111442968432548935581033249435645833424865711967534218362447536330817364149721175552609146533451042589842406885439140152656812558
975878402356612249679955526197734360125307391405262715646852690979608528054148191292935925009628347294412750123004654613969838732413461539953773571223827730942111249896262040661293
858331772413913233612827051955349766046728683165439642083520491090876799324891602263548083183215159763605517309374791125176890529045672434399493744101191641839350393429982929318996
111108237639356626009675938116531207745009372395766565785475410216949686700016552404171334339852555681346117790476470539222386617607163845732192413070007441020628090699280518106025
485010677645148619483921397689954626723336341392501483784091847468308694495090374161405853346500782806179971981440477422189810583340532772943187368904733071130822566647928409156538
048048515470484710606035689230129991407542526388741048061085885842395983209982744976822578142101478488611366526218808596628650809281144439185705815324932516659876963000350680435916
362605969679852703310448119800466910428149546096760080713181537729700604679900191341308406215140076070285499518152402531331833889139231667169069699044589076724993866205632745305679
902050096774887215281438582428958095403293354311207656626769590089216954687481937356918597019055647600026482784920575322615338560145913916567952257721808781618683311315762161254634
236803014873258459207871140961945717924153801115301828845743940440130492015303287694314506034777599323575383155659923021721650689439356778334035902186829703047402675845085615974953
536497286498981871360664521114941937577308537770155020782398164140013140515267629413063559331614116642038627963828240941559698816501123698348067374625829431994747706124723090382215
326507226901876325138760621356660452804771660532276342774862589458205901514464977161747105505690397344863593501995425774186932847683752163382482076834850265761276984950311072446801
297011202246836219917512994091030166268924532183817521079794229529035740003318267680921779867209421368427142065318568158740679010850722945068853452008582342276170396876509864094048
879331753354715826257300822778576095879791697861195862452726670183741979187964419920121458249526329597527215657593097481090703517666430467270053595313126148016620222317199187210654
317520623196507198452099273612781818715303734969642104517683490498681283541888245932230488559468416136746293200026235260402628297564708951970063214768127119922687533613875474913650
573455153212265267111899856678613698959485078464046231827486202458872720343195624831570579313956058962067858456027898268134930906585090109550378688080265061465588814034621604639444
554477882088494143181313247453560541579677887138870930263290080774401141269272029947814861559762804878959473557529465707179594333116722895771485225141694408984123915822208975784210
243092538236459661708244693387340269402769954763164386461832508913479774128986372618308774252361960434007356767909010561073069982702919999317314367066130430766520095512373490842260
798207389410305422740697104892513265065616249845755595756596003313572738907552358693722854177324833828856661280018346031660093346522491876522893914687477616898067806483707702739310
214898591295400147144806221437829924734655779286030287691563204570611224517340881386577341374400071746723201127722908732998526283654622835779641704080258859221441996179156476196196
003748377413777690583848146031526830142237081664453336659852995560367796792004198843313981992483344717470929732820312579191551689690852138799612870681164124720194880175601005646725
939903832093138855897915840966985587645377025807505895038215765520444614528428937427752007577802599923165720704035715132322236274027900486779517535974575865972728857189505465080224
108257118059727171726297121871145463372881430170473001939587068881654704436241210462945864606133688687829275443749058932203236816876976273230263592304299327200561589739046701687569
887953793501877332530641784115693621647845154700106717769429640986756795084968843606493831415859514697945008868629233564886553731131659359297527654074570659877843157568602111676402
1964225726056391734486418629419301779992029667600211090942911178501117984608115633079718085555684631492130262655585911043596375875869260030332138192917892360177127682602093354246001
048098947667840130542031242706824201736854570196726110900276696647114902378980165208925227652845351019117144226277763345517418530313771369248303800330573369842895589326745546832234
988008862932334034123360384299120713470049112801721936147687098713204300968081126593297461279377576921783276953967645923082148759672149965068305308047213410925064647990767429678087
870594870118295297753928561606199715239931165896453326953847803327071751258053813372193054982443061705319868204084689326885364974179139249161323005148960099451721488538714907556859
708131118509987779055993798740935691049949756489576136134002091960383589085661450256493019125974343601949413801677350617195143018656094631577938912105181586975117702825530149591072
367336028375663876850727339947689330422195322030055532289550374951853431521471751759716516276079853898091625693110434872575601383116081387405879116733470898414578020823668591146700
044200820237337535902133513941058828290431520119799013222584463420130633650212082251857779537684904620309401063194799551438313824969135961259871979423837925223764421124318575966386
668067917961256113247961060026996785627987675291931273874916346485345571755224011105047346407357081364655863648966488651859768900557557421239141056430867729348900625570325194692814
408446256603028426601086016092270089976350077041713694581110285997559053805631683758123429176078531929182240798657779437919872956376074357599360800602464332916995725724968666931537
725924642418632225715128308625791937180892045780076737515529593549315521261750578228624319138209861687577472503263357177776345279144289774345544293386918078564484491126450234706762
792060654435470711775033940453094041216903230311752596730917891033640203837370582615524686157412649479703895977003933264450075559166099327467913066965744427347610063950501200335153
241262038955366774427799270883039169571760369404680286439801246580415659982981315247252217565931687204286881775311019907344059137127184495304884370906429392554153261956255053238112
703437219308447761988575485231954151833050942406975601073291053790367552233629401092356992860064431571288712123321870903557050609924305751276490056271327602103721119170267115189798
251610936403656578336344190482267332764336712864131284891656778896273132654050071027405050117749233189960389444800508409773748434462252108425552642060027525950611053207208649144120
341598246400747768411516848954786204843752220018381843038841067601768216720710601579905940135346784905826812301413608209824069396660546105930362325789249545969248772114783264521199
342992526007693028664571868055098232020352203416280931151754944392296895066108250996092043568920271721104960472842915285598616246813463894556302602829669400861095681445543898070103
120747108426730956438078315536206564212669919049535561465494667045323446477052627888193427876345191464485513108795996384991691371339216994097030908339260626346781127653592612517626
584216712967315359119779978916287069541347998256373460963604814927614970603854219308124147122163708501949390993909388852421760148059940808640595159235815541663628418105338738237697
848695857042594456332013926426390433703913814293082217001550621453256624660781857674524203874752184817453331559321525837643350279780626198198110924380032149347369307213326473652452
932214545346910581872977890369547799824143182556955745469208281087389624510353118433992000679627159848888333069502379270650581724826801673213510821585994882972069433911330227764348
548385924291991549007655638741620785730169513739637069193186147336376339713501928758597966235724310635276503917822664685577805093748019362106113751188105744564578866328110628760454
073234610587961098525374690785476676900961498979719120193057717025485510030085113270994077616269663472014145103835903955247207160089432880200900217018402533502090113687167302443637
842319518358419453383871710914326968230306898816920657036123346145945076000077819220768570594811472190291721209324957417334886065211924338235638066859005487459926310629536047784368
131675550268493267233997103580375612342849267937239342904640218304838490983863601665192649582091301272665266933917396524069750840489634199326062363296397249705965401745849089712918
497184109565809443644234468993600532508755316610194940412174862361594202704937954409881528937697752443097818402795042824376897125715096825148344340506027263834570378258597693084351
897137769004784894457657473162126010340997708377395796346158860585754734194172988485851218978165614247337639154715408478832972626374830731132838117304374626796631185208339564613837
719695908711495870704887113579358869085109210864717670046561405118197585383921824304854553548667235579086007074248896225274544216026456716421520416092845090575376363949703984840582
127186378859058284090599529944644650471674796714265276555171145291394520980841993449472805178670720666573410230077533135231334580247866248305573213734628282734075676443953683540665
0393544091280056740692488825209259738275903340868388845770890160545289937562981913025808579464922546843819436614549358890588987701239803504020009635966873681382255456219059340738491
1052091288480177219443138984398715266801025735541491605291842395128364329322717847159962226796093347572808070507952631862922203488278217941328740152800293932482542344125602313559507
675312405485499502525290303452275238823945398531685174653985627336372899346859274705076833709308772906078761835192267378868228336459113357709298692332781904997489132363686459202440
675659251014266437309663385084429022516006557100799998266828982906160982037268863163966510663113336423256245489356711855229204602120721908617100612330824196907519989027649428458170
231250495349185435254520412373769713446858821365714076023938828601004182628253243338083192962583991369221476900670863143310477272560364682183909626540260744231766962576617644767208
346833209996524185612962829506166344102153434225987761976665775153831986165896740717026086592551882661540238456088552040656340612001039995377419522312613402644373306398264032415036
559167713862906241299372717754191558857639051977959255624502585253936126788446595311282521334539080330863968987987567457057993088918916755474364730819774840996866745156106051892545
631847342819119282201662173844730103584911877639898083668085123201178129638043403143713277993170905128709131726097859770266922052711683198515032168396813952019446752524429579487944
096756087848755717304571639651670383124295060938686074486749410916347158937137113838403164236091713411557363379815793658758232860792535563279940494636680351753853448437168668332029
417231641209307938599823433464308396173730065740936325728574085505295434228521264032246096447059534749815631699481742735736461186772855045376939480430056367861133305480270259553360
161555635319856116787798106896507920484648615764225583879337075011399341681294716899706020183763318645614504294508551488245114010666129058653827373361733555124898071059199875762697
647159254824527529225792209052066433259439796346960728300284146948806003094878334529754230235960359518030944297201332032664248422327812601162208582309273510115871229177915421553743
067599511822279375223000534028424531427241313445134030829822602350216102916205021689135809674310917137741998063108897775208201307532407268814629533515753488866768917358910457473747
581564315529172528465733675466025712150440160128119531299083422215260090889779173282181053484358126159703509885955054129578709172242510840978144220824077142005822781574892464563171
512505133310267443567367316162596055319347810758987175041798706286326089273328699039590454246357875921279451884325998565421708939333990119427406928920221797972119808769007974277309
791327614747948112234552967255942033146104419309684135989110195322564649172081821635037297580989055504262332180259820015968342256529737972171943770727964753746370046388917906220028
563509507449273777792907223717030348802445221189131051526067829300625785945040272580743360686721704220681079275336391291524058374003231701721635673818255813326417099836085620339195
043486725747368872376585828015537693709333213789800413374842371240857789930449933428979679829421978561221385335334349803663333773636664710275413869104346951242960277871387675347756
605343270372949563095706488375254612631418357781541672021257797188131069585819462989239863261781535684418821886448148013751781968701533742937762825953993628197736725588339401611565
276182471534246163175575423935444347342093999801264676278294803685839716086064468650609040820628088511469975623833033948575564459061465256763663582028057041356516847313024069539578
794613731018893783114893595198318131395729279768188476392138240447336542386675658998518393267186185251152467441343907979702914575820263017361158157540792379563895280142486290846166
705332878908627069792700965306437542230592145396294360740985641680301929303872405688001518389392943037908247984439404621905915545352827926321572529895101404649319626022092296413506
761523420270240902266291835020854184003134597575143368001004445560801967458193538279058551942727436312136660179407543347483058686001133687738870643246384296638353478069025653922370
265141917423667860496421919925714854589003728656186219610924782554019317975294509155376277025554768449121200579411615846104075887473151603502199903154246849014789742972798834623117
889834028893526976975421502665685761028122927381014459802535276189463611862822538626470808728142702901435094243006550828727587386449548611329125753708869888981953305823558638321094
444621337638333058163364462584209798793412400370308199863809868464291034757350481003931204614199747630885417046961894157534559648916621805617872253276964563834355243140899553216503
019818273664799381804785502521329017458753510864847844086304421359022428744370413698659405702377466677198139732317793966610101331584311933098680217860276875187624611643687039062430
330070840851887049935848245330307856575210776458611904019138914854799851528952746447728016879700628028177111637582250377696834724674249110389270787073122817614830660426795399560388
824180793666204291660349731155935524314951858875221237311132398149289173342577360516004949766235004226391529611999338147529802062300278266284986676038710057586108254648597317339587
576617191925646905537758558520262369545932460817714862192180219564857352181720050113018060678195459179360135151504469680291532198232331025290586548157371631500684347499588043787629
2596179677739213611518590878759334470491063240795660124025398839510888485503875738569779486851240395891481200547844471695138258072638944173318314615137577256616251641833828694782166

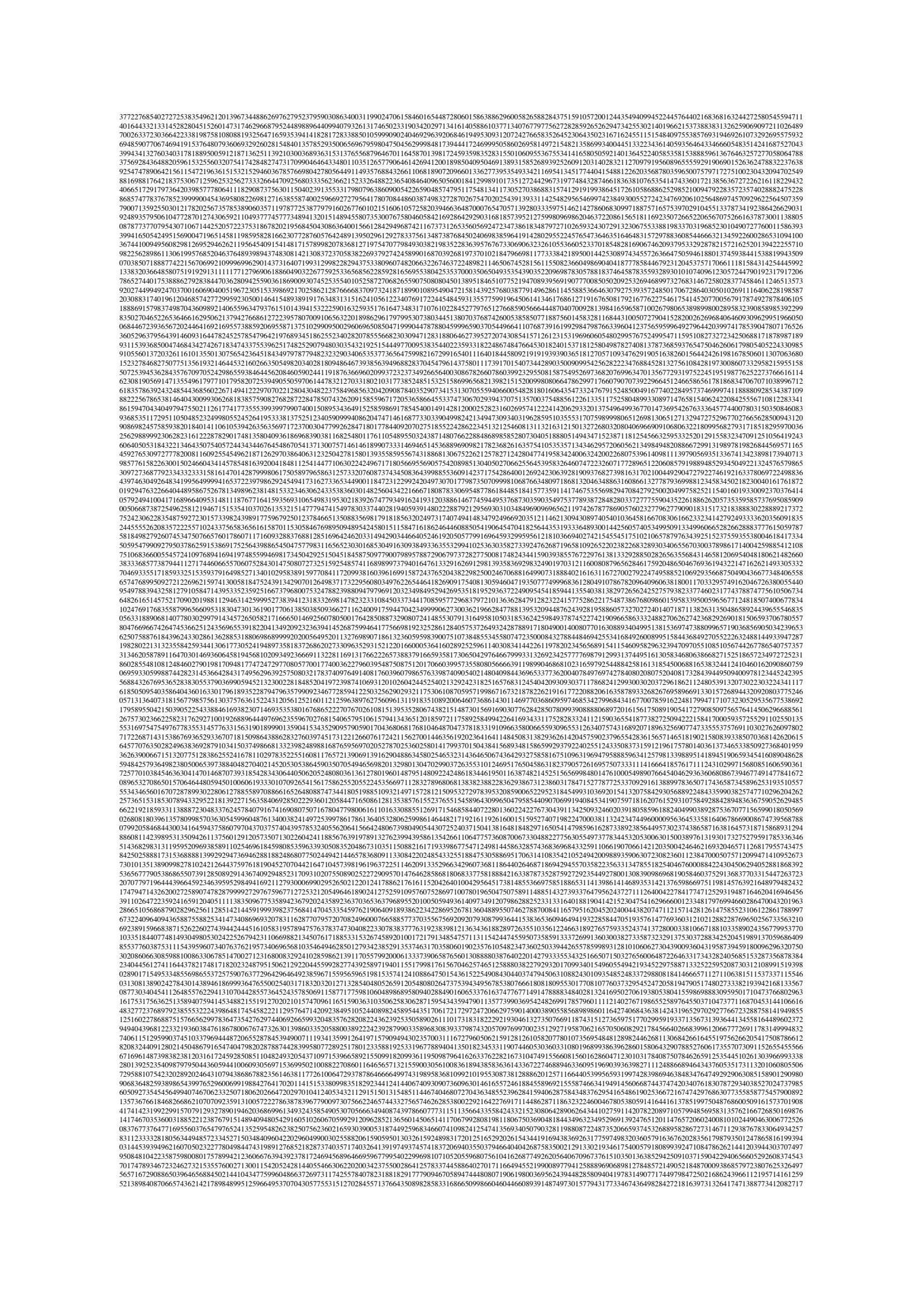
5985016437900444480345972668132701079260972794458459116595278613674966201827704542313583284080444520630390827858491126253858627317796076236430234913057199126673407249926587589671 85
6849201658729718008911643478812162991201336599514524953263232271934462038259307847671844878767388128314416384073538186026505778890408462096353404170523003298554398222247136344133
9200286110724538250891984931881569701512016579435146659374010494912558515349142073264976633797356834047179370547211314878699779920180103749080679426938530556975018102903797060571 18
4486262157085372560508940508941340102883652095141660483711027503631229926310532823564193363651973094763187374297900147629216411011377722819763981748057598158656499941252743686452 30
8289892600578062122777945932920556316347124616018807699719295139161347879043545208188903322223384714246032861408827252642723346358095217867965751244864122673924344939571605669132 22
3928467112678269632293183810272443799078494521806508000035367448955388368193621926195916442879096783061525394023048181305193530800990583997104943779348838491915208163223453189290 4
5464043510838198123315050839301193112453380848967891841262542362974152912091670667792522892974797558740657090795897011961337302430756918339880232602897353484065818319638395158813 42
3795075805541470002094755004087510680469536338287064316387015394330879506726188229082132825885368228863080500710701339182388193290858255050741874536088614377710081487688332755378 78
3761444633983710764059125679356310221649854660466862570996851029554948015026526311925316386850271664075324832680557707382177994661115791433149713935811372709660490288591274150498 3
8689569472582194043515847614018216514295414183286763846852688604724698866198001786037577134285419238725070996083790863018789199844331972765443877671512724731343314128082033606995 46
1151991361461442379054281349302765751984259675892219577376946854865058070243049238622513622082380912384249062898307151868101596130200088268006171877510940513500522853497135168099 74
1679011597942757448452430170752469742586040151606476576948773066374146597387936098342936013605330099047171982646968347522894319351800386988306509786032889193255855657099443732668 61
2077590504526363037436035698448485790373619561549928057461126525031672858437015080216882712252908924686426074389208358399696419840796662886487724705164800383215912698290655927740 97
3966135613066457819353602579239629968519068680953073563695136879770622051916998694324476234290117583676198634333622054175837690484644463909222811630328445313326585625280582285467 00
6638042126482359683434522933669177477115352981496712852493771575176252731854172822638424694733000527205329904779580968201352732784767586025117516321348318590742874138070351612446 54
6996877103539490625273596014027273273015830074994203371836317793707573136249669245273916570601225488701571494974683836813564701169599522086011865254703265244610006704735479348562 11
2282778903478389868553450781216419040592661203874172628756594040054753392193245088018053706465950474789749778281555262043074927432489246260227654740268992165158417935993735955157 81
6402739591977721941799786701761660198926153477486363174712975131031719581970291236040166497951968061448906799360916200063581971219954744644031204711410355819929772217899851066291 98
9295619997592849420472729480852385058890396882752229757934523274499861944330386965819291860329500759817300282873263409594162182368573843543627436645542169948992897939640660278162 87
3632008486576007086859703736512495182775045031313321543572732859793227261853634678314054152389739778158676037798443516548798500067533428557640955929990243757061481048527189357065 92
4966440553623228705831828222717707395637879356910633861527845273408181554704323872066499453550382020114725069337225604876071605368470305727421533668853944316575300317123640970245 4
7746088594415324706634954155529673244854229059299631717348764261168326202993364368781253253177968710402594567458590186128693358511994550108441785879505623467803934692896451363920 8
6058088259688806027498914239184527814085020223945400906613218737135523901025733833204493455516559054556956607626033495354062193887397674753614207256342195686718764268092623589515 54
6879564827709389248933117126953039001943541469731397110719096207848295297755830813758463460572281273396694978197470607561839880512810719420615426655513210491818520150969416797842 04
5384448786162630067897455797111989383575619797976315739464540212083129823776081318966558385235511839159945707969365207539240588642160028780269887280440460270628620472872878751507 5
0849286925622588663838500651910124270214017173443072389643332040446241881415232807036546949860566228888876737854270253996521584793640292077253601901230725116572413684705186490532 55
9250316987195235768910274254257474922245970036716349646777820146371250337035340360855193700516227472647993035117052543737334180296341007357338363607747717983733641865329893051 0987
7040957226674159220390360196755024589610908556360757813828307164253486551783634635224091003021089348006992154449468868307117806207988729256663657445308506918188055448341972853604 045
5296407440238672902147632727716914581930270907557818959464386219553791580189212981323040356698005147636546215941432567322419430119219988420305832630477917507279705283967345061943 5
2924894672812502708933032429250608641300176843053148780633940177112130242553027882427327763648010127022473043221750176354505509329845531958108713334207354483576463482892408937851
6142329055412634731225226273187887176232501338833003103656577971395013070850407789780842312531602904549708692874991249226489762858346404523754758349080256995547336127380173740242 37
9575004092132403588740117568632993477721345121863791638217998940792725079311350522062223695132390333472474419227837327978428285296825992434696945133364825552528590323404190236025 32
7248548913479171292077659634138781523930545003533471099849706239207139171744843073093772306259958543128397571064541977092027676213313270982548769850301115114168161253375203825351 6
3532027940495523122655998343008872707650771613230808048725199451184876525671160158085515356375494517666637668749938306972147422746629836409858205582811443645720964020641399554356 4121
9343790890469502205125430177545498010681226741622038835800613337368186664372768035372539548104308720187359991259548406085447986787046776677837468335818310880400717746244266149085 3
7720243331194443219597754797304944421771590259146107850000509879493045582507932855349719367125237739443750136303916113381562103026627352104167308219393864011852432052350630318251 2
3820155134150678515916494107687111952021500290069834359431292717497923431867337523181935820582082443870797772608505108598948888293528673760848375334512156323273320979334423542881 09
6960844061267652541820247932395339818782559846503463738978285873626049495632888225725808568529069142120498375257294736155038276026356147904205067227042506732570168525737921891 29347
0156247652143015832880732065528719257905384388407659116385436396650060569447147949047470079210112847906044756263788034564515626449471145756807549068789289409390765257410910576721 6
8135598459160209614961985320851608915438562717507994985947326592422527405989877805086205194389206827204486881929996016258460169221964930042034691716717370895238096717514083 3371362 1
9594026223308782812131326495637577109253422308492399846610633330025708789170041944723045371774611782816513969298443595157733515946039771627564616807672267160410934337464809769666 100
3554162379933127833695912415215410500540211845697725609159004445637137519904722609961952923404876520171496832496941401958388470446125618756340788310559199677800192844487139059962 77
8613201892952329336718269776495290237901142008265214483467651032835931131835477139885696502713749105727173188578530826984097899413501485898806654221872835239653701136093777662186 4
4178857429056844797638217322585671982604871006161218745789019773866150960293809279899007645829579067526894179085152332546440054894007079914642384179172976339153926062159462580763 40
5781263123959965188239549830407779579684845749405967723038547740133517889529044208143101738166673087957271139562364894437549428698513432576721709496005042425461096267763430187914 46
3953409127771607668140331478138091054476092889457471090425827559649788893170515770345679841925318213544479587739235030326773816840972797658203950255155637160494288012932618895682 4
6794460880396772373463931480655544469284563955770700138938816127783911263675746443090077888166324188370607770066794681059424411586704306234419914357747651093798782075829441972453 17
7648047804619967261668926561256795743077146951568930650782478860043968949100372142618947220898203515256152530339498898838886719207427597366119022903845927974883301616675998161201836 9
4441892646604087132583698798043763555584349372545635390324757224497986171503123352647717029917103940293900444058627804060667042158686154308482303194505254186341568186479225175480
5814794809732813096033128883908717861005358934520005388155485933135455324476103569417807340515833962984798295832477420458475285836839130797962617725987478094003729408021878381
9307449731433325467629551820103256052982957179817203127803552919280173530426329616188153577784930884485929417208745845514353348658995201616379766160925929453848348178817051196390 80
9002817586178991066322905551153405143355548382538334120097853450395240890943109011233089703330717773995565953577838758045399742389054910976331693209282381208918732339556168395957 13
3138939978498424275571860730235093232272012172293468945554047030523277416042482301444597880841904057499851948267928692592177866318101275845582476822972763270189858964273730265235 374
3077210955479670413959086495213559213471938300107410877026227569219893012351381637562245315755088475572231314058436648204423793801586126932559347064935536264804644215690695355328 53
9166911666771925822088770996228894934161416526781731514934554036784221004251403555529380588983221210868076215624898223455332982034273117934149191774732005150277204520361395403027 32
8272636357743288160103048047811651037937754578584547744743406291129049783784611449698653051738037961727624708891344453767330578454898632852576971485787835206574049022095037495441 14
6045934709528124744044517793893456283067510683433628465216573802740217402121517730596516520546070754049170354523979534510576454661150398335207536683374395561306782277400715972068 975
5590414314958275591597031839555111558236199091384170975108281399028148470050572737540749242913566860415784389113448076157601161331328004103153719480096992015389785632197396537820 9
7216957240469883155980092053955754292628752064469516723119714866860502038711986468851730816411392023567766657282011665777730375631907531018351208682567705462981268123972170907697 7
5736682854647041320462232513808609249486513066590908787459312278615469736246860354103028439988177452414398563874728305154103522740147554583514700246223684294667895139649907486637 14
2464302158719727911679157491619769991593726034629081842147005483424771268669224118804171745699453057340700644166876672137373985020703046299790316339434505612478233058757915854304 57
2566402176110022421092320559672379440967486109899657337533207414514341627401316601565792758370548666409595549479181608322346653681139608885226302667641042647567897007348810644930 5
8892791081944674428165398095024945938438880995929267495851618528440873921096360794585321252428361362149076728498727925226261798287598029843798504343651795176439678230098990187402 42
7380616293798111943474166237488344302875542937092486699847429396711117040338678924397248518853755149120475015784759627940322260972870815795541833410825382320407606306210546360465 85
8086510830367883572512690317304433807734751844709993395910278893912479674006546366336220340532025428936356775168362446296131659447936703350694068296936825015635405972422070089127 00
2432526587459595151079532384412220296336027768395075328928865078623673808740608310211516861638633706484744145562590669504454353589458714514161709820100075177142500167615297389280 75
5348110586756238203150853819980372404581109708569614136343864371549475962648205083182945163974886200652679588451380634861746717291641639227069631697571960143254561401902991710797 96
5932790399983492434012918918857689546131901149449717708172254686434044960219552292513245067685300487400044774344230098307041862717318715402799512619667713315820456375662765784824
0824400379284998801980936291193911101320393165083568800640378754627179021713912639700774870000618148057582399225953657512851833483018260476168412626057287026207420765070432077121 6
2287671112586131193995653863559933697946281487593880394927257229433273879784696265472674312683716776093128681476734105102589813716621575283402926203960371553773216029665553219830 28
1832024406568615054681381156046807790242130022978001102728985622323590663340874951560721113756820460967405989653747041243038269632268134282509911359432963873774150970368111480947 27
9746440101396259748338667673225536276606127516651178489748325794225470319201549408323862770507403594795289607477739070455180289656257723042702616612999718962994111708710711510687 93
4792429093950120542151502366208457249732559536746766914410359608452348040663417554862013322306207069977133155253479797982923997748355052922437987280238989362042302697098946688792 63
6887512028996119696400689342268095125166729993335575795400919061166587315159718023874102469320040519684140591557683478886406516811213953353361309260440996756198689680370591925615 6
0240135797960129387999361686649712763310233140123954194559452336785336881568026679004849689538526669063019966208922002681883761639510605852801777716179047081553817327278197902193 3
0353071223356276153768328871496209953338732672989236043315764435289806381764564525129846316414274049256254144534654726938199712979565194201772768726117631088884774004253880882856 44
0044192626962286040863527763813307716514939292377576306708186260533129601259562064644434244737120658480356497322109992640830429784225536308596996509810116521900640281839670789524 4
1018620654016581164042845338560384836673367783408245067270827898960509254574193942072558805673019645385124971602230850316695951787814672522924891944366284757127258452103921440324
0743744339361584058239651163650373969330363834136064153858304114934555000635292851560492262604370483863703855236472983803064974874650739825467462987713623061037024794641242248882 2
9374795778554481125077146861065478729808976028529295311142573064237725351555079798384715694815883963567538560341282034620051145260369274197034790825318108152631206332643707128509 3
3716332218093522980666494195984375570787644339793944229741624136546834778359043935307931043485218603267447097072684323044213064471289747815824884879172303937787829278051572596876 9
6177498879165596385121940887784427919687409350565137273167043544811872788121471069065857603521255851047759639154160440039814271653852531356331829022641807955746274949272396852675 6
8601522695482028041356805001121795870898225713022377826081252699033396864384450141995339686888622228896717607483282891396505801915392305131379771564400726359465877099840530297282 7
4142223670767829696674135450531064155917595544319453871368836263254793870938601368617839103461407900545527769057002342562331636288302370331082653461650367432241976274198212673929 0
6226831329392093459547934030342446363027416334745666504905537684463002141437203423013457087661385976680875339627525261435245693735073676428801095329420994779346245374380480600660 61
7472777825108825026553954735388330570336319083487085197330170245993931296489163027859772051299996802158714548910044977881015438088728731090334877253710225808663606375928019209207 7
4433127693382746266856548665386529366208647072344610475384661563797259198550404404185640851380729241608225277897052405500602500127169899145056203440729287964011637510620705543545 79
5296076750048094137293957188862334130464734736816621953699000595815167863858742134770663943798599495953545466751423767396790283088704281539711889249952162576380599728245245129468 72
4038969946871619641867330343294966028358999855359691479579182414975366893468086793847871565708489231777010005398805815619083428888836342350336568375995016463896868030928245806908
9496252051815732224434474577781768773358969127213898447268554305685751728498666173683313463693315641217215978369094115169276215643417496725966304840627525167277722472330138735526 85
6094308338657491088266245069550001692053157346061030066924563703398167954371931584843328797636192066531989037842631507466685421776571809681572465449004144813942099837239726579338 1
5278501955682499847248092516844107802589979526777798744570917418944336049480016788733791940962904418652788536558597234881939895296716122241117426775721619413820456136666770568 28
2074831645573926586168243514861867170707335416012878275870598823702112171317960375451146411543340556664045598177931861479492392948864967154229948848028801131165307303834956254929 95
2487830157814639775856142556790834739667836271637369886980507510147256371402058026729230057899317192120309934961622493272427267021164345752434909632558190557850171022572509806689 24
8267942837822869599088657854219490018598713749910358504821565570552303057077765802326713803828337686831100201148822956570227869261693647600643276175614273827628305702949218585173 67
3328890903019782686831923468889163332666375852132208598460393126149479320018312909593201312132103484698433864255421019148708891020798633727885116640894542077456604467116839 0683563
0482748197870504458692827241225489551340467063000875720013886802859960290897622122596657078859084513149654675190383593268470642971911623231673343287780478817234510828142601983791 9
2557041898601368822906412252899126566161952764681556049610998206344191768883032804721839449441118640607347807944735481926822647134525312862422394743482128242175059637355930299088 87
9671862394808426022339256313878086086507613261918360523109836044310245251436499321454384354087633480005686971847023671212148711519659063443421310593826544547344834230922816228222194
6808618318314306410033937783365836566362350774670572389999076257502017634586832386702085164742087864476229040808877162573290848323457637035744178309844586576555368271391283853777
2638781132076491748602635333878842733450594214430805026503874080446857815725744428850570173459486480865159013819628900009666155161632856625823664548087277557996695678382896553084 21
3918198536609854157454323993105499976946181559552234646154965063905849666314831882647113924159929079044338854914160728218889009234920547821540181676280541847471646151882952883142 67
5065585840836001011931399509528733938882787092018948626993100793682307390786444992338741568056455380112462217860220508173263272389371192842992249593821145209430113610012659057161 8
5844894155150298975645113747029340232681676610642933808344571895972529609302432709312249442715077246124529301613088157369719515146319630896434488835877806107889677297739109323220 2
8100675158910278726544213418227223819591158985075169612805921169293350212044141433108399068440859823407391095745590502623486779009381986344519185214842115585386188989588899827929
0929064556648520590309595811762030661218428824347927667279791891645112135832410108064423305124808647346109146967240614450877022294811538014621332122750786900352976210105454844070 54
5380864107796420874643571468793526750613864170702467535311301161217382946305857076137633546331961841233710785452278322899187192191439553666200880733109495961688437752528345101652 08
3124271015830720841872380414590401138065091390932864768033176836504333647758787221668804738647180171595298581891057796779548599990266219347770197362859707364304739845841267588268 71
8355747998893004912051085987508383907313113489791407406701344860384844607540848680214595898490161405910614958434427852248818025177213835178840232021185023297829351457942869351664 0
5314425248423985435383117841672061022581031421056195100295641365509030564636632894050140450893557447512008394431902269216269005176750933362768645692992132379402688492472800206104 90
6976802569643160832462236691788494537550185790614709443219754825929280647380133357453100464444073540183702573364987521760707844211735053266530854170722858800835817707309702625436
2333280078670934458982270134033564182132545729413868688147851317366713769764272093196513246473406680382739345142217100404826169856365140262627071119468712508934531075627014582765 5
1564427935384374606785907582196756846531684761845727922936556253115158225612612743758746095409773959051401591172723244378027451820770462437000646065646945524052230791772165149226866
1966701155294178872256271018773386950881007885558592981823758197927988122960542084358041816246391485983785402240832906343661742140857764714422070608160725374173088495992603367357 0
1608117974311106003492654972419814944233366467598456018010718311809473359288090463372974085908535878286821363815486566391341277314086880162700170342954455272507051981042859290932 72
2548834735415128855772662762132335378193210195055724715129834281652171417562052193208783388340734143419089439239366290024520346794814159865584432598242628825114648018008641709043 98
5318166222197525879707984584513114287093209613705571402089318004268746149218929159117311640525084356865293130188470411877100872573659234388728767031896360229827827396664798925863 91
0411045064116689454752354227909166800972833533562810925712474415681429246077689688071366840987283343662939756496096670928720364549200210239125164621654947969507440495007904003793 3



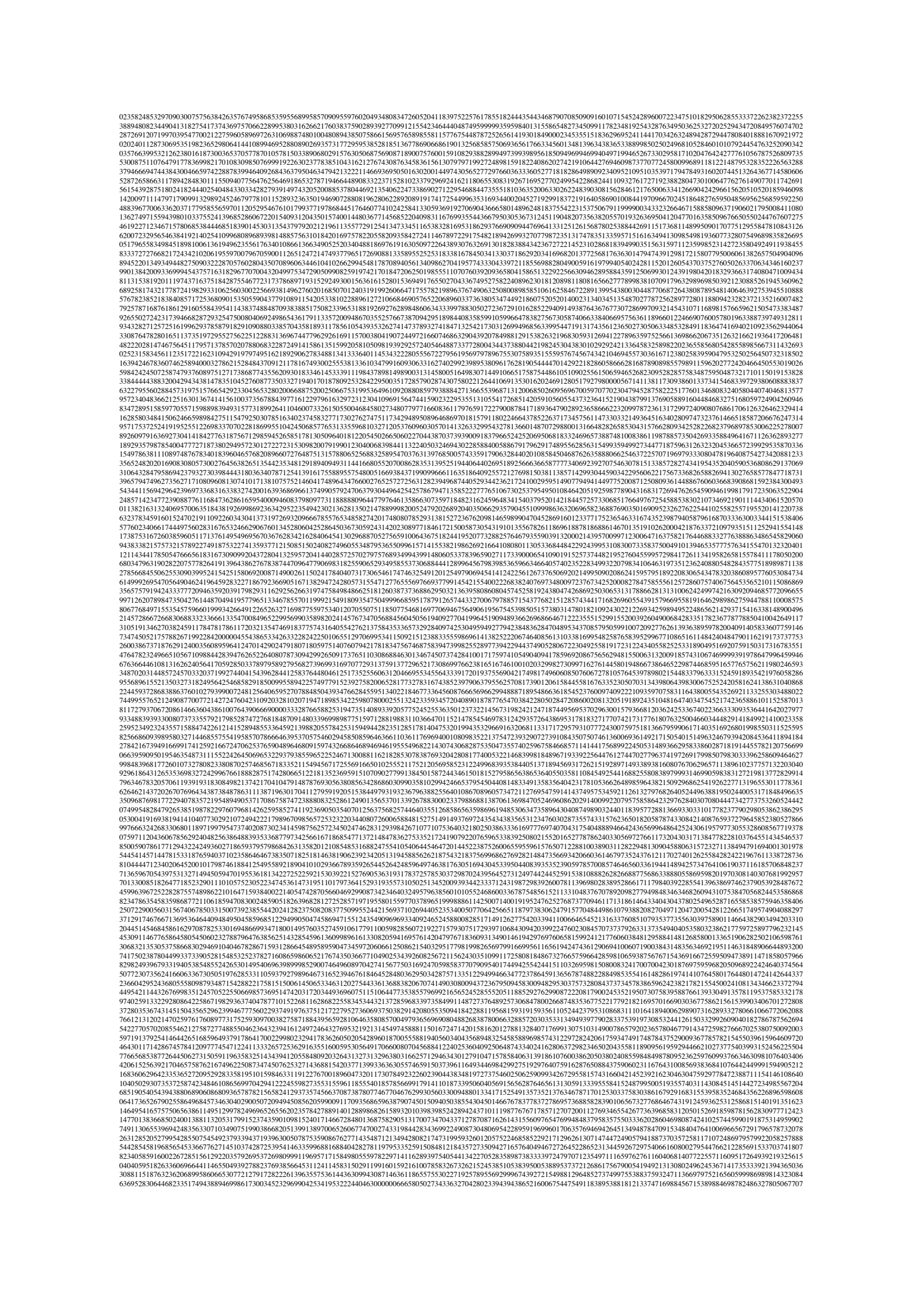




5913736210156458474636216581956377900020337179628130109415161657094067702328687805126909669401707012102414026357460115552831225034112538125119372028897568857852016072306603519438705
9383280554197754123573010426594189876315749482138174611865863026062954063861020509563005149654430227727340211794718113344128728601447172802911698616776686379299907554537812548522273
268268644253853938305328025414348489178986479077654461365695181158674082339626734478440814210430518783975964488055271384399669933711689779348476221510396519031258375113548607132613
9337503829087075380556418812582271107778835075187855611191995140007183716765178395875602990562000562361229377250710838709002260823405357248625998652796166049743730581631138122036
0812225314833474557854074560426653289586663979376427487442313300822182298965412706414734711254970162245981664538816852282127272251175684045824292328187809503113674187249150451059
5761823631193477618411235219729555140874204773288243766594654484796273764481911246847864447771629952207976280828377608192428505719517862952590798936325274242377385105942022091247
9784895281597964148423581236796428706474132060131382634734767851446606524035947949157496303378142850143590981115803813542373191252953821454194260722093565253322493587012133889622
5235922416411944491469321591749457130523270053592298139884289237013689350170440109391069668088015021812523926461300784538940485578925347775417548373899332448150320799185527900012
2761659819360360875927068109202093050375253498455188124726591933951761710907588701515406318767693188321711150593817509238094150749118790403375727258039120745226910918115315379222
0180676786203094506872386960218072540094725037685867852951923674303962264132840368866918370837544321103838426804081059275216647931915139700633057050369181856477115916078637019436
2674660387100809537364790014083928531696858133760712227478266908848768317266489360136764107597135460010800016128858877115766877062055173700526833578721868930977223203441090642379
2249498131442747690257812868854606127230823650976092079830649897512352326135255300995344313731423257387406251937521972561251594994149310155567112031072598807769313982644808393575
2751200996943864419898913107712867806589158682106161600368690434468982672327325956222228658156338346309530875416516959868542022331848967601937738893541211020995664210085220864634
9598297842448554746927424031061755687250602309113919435748992832096651897311571302703276216645223309188654220908664980775524464006035182687316535462167453902528751584837302769402
6381647802429286429691964592245046251196019182438437926810123408020120623383637325938069167093366307629600281718517754535966872129622581094813410690814281558955626977869881491057
0730752264657829543697909467489669769070181731395270160842138373701835732992179873821503294823670798804353730276890249354370059696215457828712475865652331587831481244353253064505
8756743755086392534030996106729293498723323723726042620881470624125478543940264458563299977014864908160809224568218977264521540774614659686528402651816225249250683515187962073628
9295715314596398399853376507923218926110173486024285210519354834953668796239556496352130522296133422394454952795017555651846153848852644399215096461063286210626104999703521069323
8894813053270904948054197634914081860559830916275495980852922812409337879108465571235878757169618709693999646143765932098731659223004943174161603883174070431362958137356546277797
0504776884442459537804152509575401588513681784855737495026998536404666520247864404945365148585225013558630079627981018998913732736967490098881605440895844359437254159106344124
7766889338473203772570798678052409824178157313998606198563538661508269440156908413725622406555312497085822281736612636535891805777061738459999925716956809180465581792891517803910
1688081589223998681026375685586134659077219477084401669021148511697798742275650891016534497767616145160431430844101630370596710520338019792511035283174949992463521685473243361812
5764972798892925331454149153778768344926398974563155638976115131678766387953419092881989898049051953916802740950506162794214052193640339072199885177307000192768990776921369953782
3887473681441911963113681767160004917649603645379712167485137575161995597988703211795688518329641699415375642347597001884274543542156727577673417162041613672805646256102443462503
9590187910522947850297883160331519458227049027692508732623390805803118750174742570987223755236296647395390752216855738679036254852614067340392579094991800354312437071971862092
3361909404668851659148287228666017090185726095353139046631823481611260716085503611711504654877080871876170061042173163329408765154906842125513037231436312878318953042096939381558
0205020465654177051090525078179109157941215417644205860759495663535716568573991310547050926863104244831583372911107428384119627643651060971785099567223802458118978349784714295977
8036846339920043860261724693714656214349290334401851204682026349469793728287090976720493135851887050741079037772494400551363719124348802034231507923960648522403792509307309617262
8602796679926845913941171147184748281487287183928191079693495603605488695661404997744618867425639261842282199697344715244046290490412772603956470901570107251535907391670761808624
8417240390696356657805752749818918940564039688466832188716835226652835474734072867265922040287406210536644617580543295921469980680169634652745822082088777854373132854332883199122
6036868462225170556711998817742761100112214922884472915659119917167266496974717972832249053083679395988462268360672523086138065288413752384782787408000786218044876304937320042924
9329954280341734744952028876964033123690754849703236917305558713051267750704635455745958730344061165853539443026913514173519250792097918603754940265236814361749513836135523637796
5683405430348362634258616156848387388598040186169730608560000449282394101990224525319624634231554896027938141907218040792551994618246644397513280290643542062863525173064699895683
0351118620166723655255396327191355992237604765553802633287924238455591087363261787125163652396451914693183862012241731981015605520230186380655243956421990141508039934870089709727
9849421916234517260047585091913262168660176691770551891929281677003686636176811024186250627932432840170861085958907744622249503418612426078665348690782977441359311966427312404659
0146860766881393285079223373323799727946419711035278737100377894656541464325580492999864612188498332256073650951204820110934467669372673273254869840644786831962178258799805811365
9773390943028043787223670917256784196156952916718937172599805174450846213073809646748736889949257131819165596391243683040661194030346634673766085693367602483928131931237383910113
9844630710701956346873305530087868986630096081962395201756750984745638156969210728189089271738503449596206003393614439255639288679088396539146004770412974801759088148473330298710
7551605922636997645635543788602253719968270991341773647668674910670931138826456027076867520944764076322732723246506789643733490582684538238353224316067229065641157275408978795
5428054862852344269630538443850597912224307141083605264503816416164336157534862000057816213555283188284251273359862071755258599399066708381933950800129158283358115523406127292817
7089704953297801909567003368101059777190565579216174117103528737100377894656541464325580492999864612188498332256073650951204820110934467669372673273254869840644786831962178258799
1752416818692084678054730587740855025991369578521626084034679701638413007124742630883118826564147355081790077225311985921987724586170833149955461028599787484427581960726136924612
4492675068378086032658867057268584982238745657875880443570981187758477303945605284421099171631811093140470034901433929727042279128653517824802478310950034220405138024693692953588
7861813140286889557762952592973017661461279216220440506867999563080969733841470412041141126990112334610681751694542662543467775269468404436664492049881851622658750955946247258193
6793721155735022028885345015949013990705543929000442242530890985083118181181137524772681676140562383360212909321377379338772068840053838412707897490566941887502682936146209758066
1004284167667910439116928934430630146159999555233212859263985774190381733385767217016010828874330415047880126758266958392816592051355573417377186780014180875816892603363042979803
1417056207261576455595888149217667350840939450009369972233737756011780877836358775814793451386234851031665092486655231872890264142200002819719406801293244124752819531275646114241
5780818751002998794117976435862150771385951335826094668603019408492488517471255797474700354136089069389704338849499450999295260654824727284820921519896870859877984429476141914861
5096297972115214328167510050462289015662026938517832148150572181205528902356732885073467364910197638190702283515887985005407974058855752271779927542249443865749645234098789341263
3139412443290616011611089402819833615004632394265379697204244559454922781160751245442629788453045324057810957571145856421722001948826998041273328414080036712792399609326667979844
9457917920804536877257090284384418510991584260681062141391972525338372879053651620543193866988082591667923936772828484325693486941559179625214959235382022116461183586675108686617
1447563601960690830051321392944348109981257748321340383191155331713802543546640197398630295630631370786554026134574621022781491535507530935765798584863623075521103988809785092127
8182193672599126283336291615930305990908776240395493645196629750119858236139547648326907977948017944239515329107555849696008378429262312181564799519968912491122864429750639525613
8344556190663402872240266267960606948497949133931208342357725738804405389979764741752397135459925448146431390679615728997478853739367792767080120164996088133728070333027329186318
3858660559338387422441292623634951073157439804294928224415714024114734111532328904950566244661060712175729255857815524928165557198290912180989431404520393607177388116280536136169
1488360496351865830625717535777288288360865599375651914588917724609984056565493028887222898381814107734415254380973421171444420638152479884947935094725122816948611136915385758392
2226799105514928291432870864456164707514619377124858664362137586352014237635323406060068433884275398279861117974205036233955167756731277808893766292999960728454787194596690103591
5956177626898362763202025698465958791710824086717195672160785801562352308282898520591352591722803419024543994491379631278273178180721657922183302194365267074090178813327483865695
8643955338880251485929247705700011051761055695969653877602302496956393231181123683456325725851974897702288898843689818178380906017833881653581983644934808541043468864249599822940
0835570409451313167743459229080563066383182725216746103072276906316418664151076040858501428245422289391770969583775463429417445763809505129367563549914053117659112699461554323
5561626629294416769271782998892607832008471132555883459647409809747198651584563919555950860961823159634597840910282399934381022420411397656169808007237652182442816507939393897
1091425850401540958119487933116615829181725040208689931346724454802580144302413162590003483663415195861686030637516185471507315906599471832007491030468926127058113569206557178
4917975803615701819683645466359007920515665324369081960218239262353261544269893451346257327669214710003271084952873938244033067497199437635277585560782823889178664808026821814301
4159558772504142229515067083381813586583725614820249515925835358779726881755000524413799981647109248384278501829877628992029568288532507693718352898246692067968914997585199819929
3867071975923450155997926194586374541823898019211091513077751760197450310574334484507630706498809387549437233807701858513944563954305816178699728461870329308089234696083318730440
8411619576605886766399678681736900394094783003374272715894922098437721539988617867181315908803058239967486667260118930659948807815379012061344451866508681638045321003338133385846
7125140520818509539719658147322305882374809007969475921002683209568812887919680132674987921548896785248098669618648855213043047357878708182525789369663856037448717270868641639592
8977600732312013253066491573077928180255680085881246199022331843913588365728067281353822144166702768632507487106317033193559848305428885455164216129738009730353280294972298897002
1349556000701090293073346990743090844509277747269257610930433651322427220193148361933063064983445286617028715305593099684647970868646344357101531906185883870860318718081170850253
4169329347367224113204264608443281911116846967522007327573453782653821957093244589873030853392315790928362943681065821180114976007344406378783862991830394035397413041453270366912
7910456118496942372725863016744015229651746423911840041146168157979389097193090374244147516094895256325477128873119838583084408466245988970270039424414903695090040260398488362104
5250564002150802143116453015480335695802228299929291395494633463501317988099117285861301066442929124103661174898891467732746433610878691090600085643368640808386251573790612182455
5940488345582221344214021750713529592744341081853815481901302533453882263390744364489485093227112623413448615870354267412869484067196585646052364171295042559282850627951664267666
7671676922016329372836056504077308712432161819169295396227814403699511631725246362429733930213181847555012344762426527215806645853704385400848326663992212939521239696760936219360
9310105803842370396788047509510074628669379319977998600528281314858339133902829244301520587632728188526174382801268048864745126638097550518894404666916003462125115126479979306331
2128703285436288902647398518845686964375179505833054854356226212294662276496121596089578792370962516526727890049298515820252923011225848176765722807359929028070347099694269291
1007037517489073830125560231549487230898029244356962368523348946643402478874875540298390593951544787966443346223084091362851324612471913908160682333188386484550723446555829582956
3933641965321140329211825541595003992560232510888640417990424377398094050629703178299970973942943465054533328442881790355323683709061468037322157174152089412844975308725295918
8396749099926269103669991542462286333704791160895152509610096278248359236307710213299951635734926189873629765080473201721347577173643915812724735426985402086649040170157021977458
1261693230709255646789832059754955654726015657460751169883490680424506630067350379990514195579823336698393060473661631555945988794128474709267553980532634142194920153964822808340
6723131929781858738919452839764790814785436561686502623427960421854620496381349763103880521164176593811991609876637137503788259672715168211178773509698549761117687403100955417859
2590718574580317480548719906475895839238923200269971173809830459135670414249987239476514820767168665175786200042893876202131407178138180553144447368816438599930983755553766621963
1806800155995084504400197607739905059491985881160322574883477738750663475843107018067258805574957577174966885174186985797913779054069884694751665091549103522263685637897542291644
5656166969487733963381128918063445643578183309351207856261558692902462074192492349035878407279006732685321601619923538776367467184113595759625046546883797306121518153811401697358
5363940900980400181614155724963596827094489635967402938711230616931292028663147826872831270261413961431138381982808230549696539233505299650797219769728074512011953407063425513948
3471503962506973684760671263171814911482012073807748074812212924671042199273837940730646417669808124136446906891515283214586780489499532639189818629141337987968402889634837960350472
0156544568221156099963851382991147767905578120800788636150193823295519816269536982781691653641895575902752051015571114135897966552418197025797086560553308423250814515430133342982
6085322636730135646823475383154898864758491774086819117355498403758301429560260016201976959764848509318666088472752697314085725964479753389279398095401301808554196138582588368
5422262040844808470690329525100031527965190347780813478049159615170697242222499323480749283038538514216094746945130484538391459174993651705926604767121874498369661301472958024
0229978280277461015976793552686794138013286166394085777234787564175793112796091619968942407592088550526006869626016534019921446768112509309394296667509794375558735042927023277325208
5223165523658664826584774807537882667941838799560237269187916201506209701159160956174751843663332177770793450915809750658544691947755149223066155219210606959472119008401693344902
9099912763554414589218924444270704327054377041423534979912505201875909638644415941442947436658058049075518432041353173509698549761176874031009554178593391729688181724119455619785
4531327202910034704315195450264632298722351652239791086387047705586057747369079545478717059436435108154322693501363313437578945826391493420505805356031907110669025067970275844360
6004939209476834863343415293557026268131303944356711420692503764930570675937365952675213257754301824586464616978366050429302101127954600059963123932551894952962422991956763443266
0222983240267783360023958384871762288918242168162465420518672274766651780581319565687936671651468055416494169166459326334689286961214680237024935697255339928866893883463895545
2128314937453734836263174109364728962611021194266684347477625119008907277362376791885092358300092253056669359131061503198159765610650568335118002806173646967724852682521899254216915
7612434114524258556086446605025734160329295629862332799738326647577800220266717889276047514379683816341380267508892342688387284127676719769363367589994621905566684404407622792
5555488241877948194461928012250855518506211561837517254734627252642388088663443824534569629042358025705906972995792258593379810625577554377670378282542824622402165041724001698824
6463208662639855121818315835981984377669032959049271974626579776980307533913311443113445358403867130192306607819052133399220798762395471169946950797986803143228990558061190523942
9313299516626630005835819309351111097660217626405462952311753145602789528474925676059373203479938680847535572378950571217053308545200650532734387174400020894930815036620824222492
3623443074240194556846222431535311706256935754790443931240318420072178234280533871774125951669754783108886705657646502045065380152217051253810583477062168869876216025957042059106
1399260413342046475331382529968675586907681371115080505869981823432242316198608153631573971105751008928615197779118347610095860776830132826155723537502995912870151261937114334471
6784320334634230343601059267525652631018666915822392933843906894005635261756587461702559924339744655729871831597793503689535526358492070065455319165466124883078136947952919905489
6946343532325549384530484214111895856731625276716447377140347048503707743246092660832173778768801852421320657215521250453684011642980859964226834853991554212159712170115039965592
9565863775374460079963628897707166403500244563172134197681246668838473230580562010103727200435282424073246189285627021691644551643206168708323440297409340746947485594871133081048
1384819985100836438598842383834701906389506607953995078542920936304267114763427520295311090280667318241057699794091174283219307464618866312287141264815119489624486132757147594788
9326603194694557882388119277954372831111391826121250343179706845320169430778122989132715905068174328699561371689420517691302936655586946382538898120745633715874984017986838742119
6259851762469132285002380440955830623951113610111132154163379574165435237632867995859794017995022566746423315804705197541644198036798475619566162403222041689429054718367313407382
8725695797355959537470370319481928819566552677113974782198552139133353587062407560183119928932379559335850589178192855195736898359852598777280456829725299130100124640937848059383
2581608070218950874499043799291814492837080731155808485668643768938465140271949486226331811750752654630144047850872507824672879186347388058164405781119487769768602088739745673721198578376704838297481793535778981482008016647169782240198846036278545198156715286952543391297274943601534993869231386235168371051329848554924730891069029474188309244020900554607573669345753506877107870119114031216213056086474731763030960098332529255395064779608565648025255446427050629038658404382209186504041771417427230231878491261461451513312020697067813015122349931839694855877328603939757511284262167863043824499644310144091960884759745780507368359194015525967416801336310036075470670035336534613580509942340580737915417979912639822587470083932407625496390911588295120722980866402135800993541313528461094668437884729341301979231845064533759249859967815008502005166254012338324637713050341263466081138348549511725035065491918697291380597794352423706661690483038113463778404888868569064772629873524405274375300715854203814333979836475968200399465835916845763874233965144240474901008944326602768629231426709632466461640761385071937493321323226726836601052091190653357017502097451311522188033847189675708566271033986223318350727734400056635501455979205671508503092385121141554351431552478066671186144392454907139322945260520300046094219152211830452317347225567861881369182420381745413013486700025151388471577392952296067872705114406041659977881713583797025352598412677911791408081078787018059397999962204881949819731359595133230629391394208512002004830935093802710804026909729825538064047552635657535307033683686441642627007827264551257389613179727290974813538372973884531419



888871176670161343680733514596728848245332939291784600594666781201210199805944534947910705131338136634791594167118999330969669961125956790950021627065051221903085381433300410009924
382062893175695232861831060818055107421484415235634010722141690178573297700047823800329820410175535556786939439798952756320896796085250788969868557329293600192680161636797186985636
946603196901453386531254212039563242914471612716536122505357725184717079409060655408891847797820782020815896538992571850827714349907197682092718736550807754706140065656235291832115
065944660658688523706353413940516536699643443247298317763007191738370015921232074315352903524097469751670470739534410989967078196590252149483645198405228114381227844214562065253682
706189098050495834467526160662784384628081678498948454937468143184497155349980988720724932956676244587788876123594177117958845001263564967552408373664607118501004899826991667961639
88262762895248824193117697279444060479226507036348684664430132880980102351285041000174586331205021153833615319399358636335918293535106861706512852751008475720791852929189976621430
663550695533606350082999238236355676505586610079179538861159126427578392180804071123760192267072219618216812199129931768225753878385845859812968627815702355436310621483470511832235
62526494636768194890577531370630991155231621206855818453209857702014023544452234184673674296783850914670039673192855535397143898774100619631371205163518243198563218950924358209914
642611109030872745889851170064634975886869821168684258122416144968138959878411868035602502392727345961648949695177188208363334993562713259135619981639698296015018458977969965984295
002692854728010835213850454463765201971017212195229908145602297052204449085259892141273499220021980055921440006607289746383776406919565416891848924524864137589083498153314489851442
73977912667346122244814070973315992417643855120003558347297419627596658260154211548897898393821014328465931653524371137536506287267286020847357689575348536185338115901447821210048
123107570253740954610301104119941968811736473866956311021230545535655482720980212485168408781232045947523542605204459184557747926454874059150782846703614849932648259243841812002402
78965617593148102152889685794379644378085354974785920448988185083185440822285068281291435289961804062494094125493761977890051052241283122127969170817710245964512939070745333981196
919390117289998522731568233861541968411722917265942799222923657953362503131561152698242217646582865363726222560601909770895066430886448521002743892659223576181945988077524966841169
31113174474067249274467363860976260489043816391223569973649009298769422196103402276459314943110529967845033624731757875160973322978243273727396639459147585240751292254249988472160
125713190865836290774637465362767732513655979841872230340670043961585566033177112576322245590306784982796528042214243062051518036554185286307058355186533090498534069411652453066281
480616700646227571398130947539398080664390708574608919214069140084517153418454592412062512503139197945301453826378572108503395201503847720450266591103965119143429813072761990647852
934168690443663126288238415929388336244337132959607707204563916924887152594309984186128141363932154362434939178732528022714342631112018889858092829944311069766353815523639576966684
01220287016932569791159952817175490392718221321744749848639645155434776434689212264521502920304955392530022557789318597120569369863466063336087754573058748545472571475461288119479
1061123218397239252286057479404982567864146055757808201236216728266231057199325322795462543048596893425984026570905133842362394913028926449669457045365081891276402743496399018948
47586640751676231182982322925393081314015196194584110639016932190138942957042788639698806761159411683504595852786767119284314045727362000671958161731619683764386615836307367906
6454589194159083014802745442437099666117877274612539688360120102573161568048125319057762602869876241967782852195855211387243922368722732436963169634078988092308
817461960464782710163864720612303532706425781770989131893673275488565407093756984745936829930367030319822087983245996072021479665866784129437662246191670168126214124855685363820914
89071294414450132569426503076065122473902643246854310622826188015608795431284981026026164676444222291611312642539157045626340989735124753751993875957547130753372023064328959380422
172775386139641910698963872600641235936469432881954828069658991439535825404084564253038436376516286880316981290395133117807204103957156576453384771591638163128194091680446725204113
272830872451068070361261369946345176405340206287858728185000696839722140192054948553237211946458622698890987474913021377070565584540312364436277436694631476168760261756092110183920
811829526964379059796977506202070439495692272104958477979094268777638309418696215848335210855234084518910712970053335795110109476386142436341339540747265942012824020337449281494
532803677822599983391466215773585857659096491009529190856020359069281288291462691125552457326465324282350977896837719544868544472530360997597494618324948932240834438244285019098390
255522154749193810330142616891315128037431284395141010918216098855064978248432483701744031236861945756213263658865345256019845678937552921127530368840169724545918006020980901401945
039990204732713073171217040844157308831001014267032643896875921700110611769751033088063460148891948067733346710881520618301018600621558016632329738610255758106920306431075995333532
415982060619124287235525180370114793964758189444381934192950378707162253796491065701794980549709854870422731365916158290256411332448253233450203751444173234043127493254586735595406
649647712706436631193403489574169474628571484689507066153260655716553386627213044030784897879231869954254041988902144900696321145033579924519733603917353682601615978351932333451469
25304461441597182797824578292740613758058574127639860691289329186471722802341106497854856010651401321097770186733092202899761757779959987543722418131569118816319633016042070525403
106959564647195549309777256514998796389129350426637357340269721617425138087691992802617294101952742521739799956049614636384761683913380509349668579939249887344623920028874048852515
3703851629401928116656762724014891009106764646770434240658748558885573362928312198359087130162625850330383465112105599829648259232493737209785778205521065944624817875410631555666
079792482235182728965252328555345656925094883098817075105803715338504767360429937165349374791505691257290344883033653024150136344207557256509768092077981127556673322319351409090761
077804578535006864500828823299980872614116947279491033426304131702306790884986528216045353190630479536699850896489539251963920144655802274406262281116353847210218881736390072535782
139825438859657817835012657501995675424298173952586990849799835156769874487181006516623908690985621353461070594375587122722050627846456112357332732594716128756059928003057192671132
220741159772239012707786080531662291353559485219973899719240793731747489734905069961016652447427486515781011715296191714972359304385413900693011116965839415850405753854861279115673
194362942395036441310886275730628813130324441820924496288192037531041756030690436763460523138268388260210390893887935320722807338718862455251026837519996474706903269701297255472275
386800244577945105997920214243078026243128490451633568797610185739616733300741622874653168352735072098449273792362372659846048045162065007431548777771513527925200528019399476089
942881802861648534574056989096450562032590192879580597018094139959059072750903665653614777962787850058322466957521513416823544301706542163233725832968615503763722959532335882373783
205719594122111780802942908538193442121335714298965316064084145471185628695676153198953583108458206989909816004699591618955039831948314809270165932237032861852222794786887601946284
97118535256987608318812239292996726753513634028953559699258534504038688166250744536556713197198208218985040167750625144749692790932773150024966028625071037981931013407539553893141
757197339403766602316509085348033285976392109616984007358959382796205555990887199632486245233528690975613921875416055401601070437136894325270053472038632135859413379539734955508459
715385924221835876581223289745582843531629455023862769813170813665695115934017779749178266497899677138697809706095282309454965790987219889148801251149864338896096279215214756992269
497123779518766893093660465907500195578475016811293284655380515296198599475019239570759995165697717692034857382202538979241547146755346251984694675178546122219537490637938562998403
603496955298639488570033398373798185217437829336323246126010742723880754479778203678640959703576053467097225724446240218781095641185323774638424228964972712300288414589148402384558
707660973979812818125587509866497372436054534642706593544007059700454368853657086909735115724479139378392242578583910208782170328897075279712116477695743001688731887682174046448437
957092442665282972516608517580072339949024820703426524925545705746924652714491110624814398080364587099534617768352396385752346789167056988268577862633196490449274810151093642580061
956071239341806463749680677236757980643514164079872078104145435124850178396076665407500363281064565116317702088332571833861730423491159369397196662182139138221710425145837073762527
715366401577727022460861716198071562916513539618473213668179283746039303517426411114132630654093567926022386051358422884003509903650125153986478157543177650390266340307248135705295
77359863456022492072276627604625804059240431279613142468558734589130917200148605003227327445354043563597382298944199818838144670894492929991898694652779261858699093222537757868561
918998921035514062729637665366452742545824959015020101394130458803434845324935285958685056554516359645255207022413271906515306734374075144898151115197690414576822885290070298334758
027415233804837856394505730517806579394294591676209705840306808461691927069264486212041451238014345253221706110544754926263686345478692070723224750815336779041949314906290164000194
06769102849682455512933516125668054597358300902479621226347055953554186390034693187941126860032623102872707363682363705403749766178383428716063785936519965380276114635632394216460
017690836628917768654584501940388592115874323114445746049054268911191490369955661495260920721620364329615400122155830601974052600155678629533056606163338172567566129462444453167993
76369707939937698073326731157892460569991708344835524078473907143298461100441261187098108421196112753169094197020665170742188282468265951669586059597363481719355266537118613326753
375888640522273959682081586378852184544582674832460057370929158311967339217421856152639652890772350498719323040629142911727398527067085890449685618240009207076629332978716772040195
691862267109682661771118700374499683924730851263732922702945198135367880970066162182138722938745098084286993470231539265305930705066397308719617701634979606072636086637528414030585
39348937618609354674534667672103878318216222488629309191933280903978921368148360642232270120929182152222571149779825955178562185479609140647171765532734334678941248435872849366864
98029943753193452327049574550707258399058684442343899005858466814620171839647675972236652499660276842338942658358320806571621318125150382836990497784394127921217499832980718190197
371627524997832297218697002523451096585980531680033258772178145248364256412193532349589879970690079683887514476373011823438427639323186718434967614966424185818788090494675871942596
246037724780135718845476621550419140272286587543582904884582522462003203821690106172690138551391268781646266373235428079371335986302410881777995135986174257929071810642808943244261
439442898674109761279976404708877013193049560403297235951002126311329745772522612718005313325417662915385581658005565296113113119948146141507990144207455254789097285470495015417226
710123637383354197998774920991662791622721147022196028533393291455903773383760911257519888435695217917055175908240308746215146807603627651871154432311028555622479838494524162775605
64732209884606808522764137622745603911831742485492140801217176536596762783723104065987296562692418247964029231038811294494806281133258084671951196152051528321663698062931132816497
108884009706864718124794039162646406562756270077890032396039165071676231815172075453692363150357096284335855114082416748688407239914641143391046408468444229317645681411902101432728
100811054259860773743082780227590499836847628640468506173551021701609398021247479917547792788501716423082134056417059045650289450161784469842198410267398317767610490586415137763545
884584514446950012177804704921391822611389994180065995799396688312952065966750407018326789635940643366853370784084433906174189963242049831004329293295919204588122924446184735687439
47438682136143849073531754313828251713499315860626664366186367614511483271884094328881541650377686210836610428619647383170396948187070173102762436494392494980153376940227412234760
658205351630676463346568723068773162482899876174499454192073833407559971866947751596821808478171947930267553050092542923079245945560194300817384375109658500435622356991133910810824
870549440229445900514468268646455752198970490969263257135799969685361687700340223141185236446683948423755921495940525811014668187220532974855776809953319828183196083085677756787750
58735954751629466720916086869317797698799487836647410491742702831836253177648614261191665332971566120999820638688403556334860733252596347041976176862239506498633367786374926307
107247558916509747758315711322148431145629834564320057341136482262243426239586704659641833317719486363323765186505893167424326747683461666797537823294243291895977295202958323794649
415980632659383868992318732906147408711289093029038980092815039696434660071624440150000075758032767625760947595580169401478923079742182872677721716015265740673379429566954
046132269967914001856714830937439098283679316757954596145838433860272794865416296366166562902623443881038589427742164469235056501441126686108708067038104729350353797018162591342762
597263476941168048612570779090485257622583612300752836232031241661174571948063713825005374434031753404760758480441986096831572240564209198061803888046478207276524065687019495904839
598072251124937796367338534858867168373315994629099555109511258450677395667642374404462933406634312428248379206790423037395941160321436043280363937304103175245862357087932585184
069554693957089005310941243180539036224333410820944999740638804272773218228646693778056807774754312241388658808606455420278961724054829004410193670107881477915627220050314119419564
95645795815313012909432177548156912817857477266912721625870713254112912919516660619865086622745897281048141199585593024836836789769066318899744963477984481668912658578094601645257
566655951307550163070011582414323351490455279432866507508774907765042443332838508733321529854365607825778387259297677538410089943481461622679125631964738105765161608647941471851654
658930322554983792573627578641463944411668653874397541604041849471029308745765607933835822694981495907200121732243753612279474612246344395806792668596813098018606937263115563930933
885588312985228370881296781430674693772689273107353169428759522503350845237543601170596059312871584206293245322330197753982521650843816945778306661938953379645996640898236477076839
6856566149336656436753557179167360771865612469393322998695659492817524889231786737009975642750025235452075442028523181342640636128218800294317862954130576075513629800467722572269
836806708348931014485406466238680061539625233556548489855592959886470515384839062371394763664797722927813127552929782624326031682331034034199277870085202202377669523050893864412347
225503131980773429114306256732642353674071560826432013698196773829963715628506182794163205466564487881358672568373666454942225996442905171646279573885576043998707836636359524920759
859311781717631576642196153861757509764115588776514657075783596861518381349999604406923776764718441243219263709094713787342745627398208502942001917394007280214462588228120934377738
68800621722052216321589233913183570168832669171816704037975887725757585837779291265997387980468517602786701879660942293970500558608331191017422156168866066942091814133486958598811
562638245342797638875225270695301714873699036333421963037120852949110578220654274010900128519941199257010812821339980390878382181282655912887717217094137464194802541211062504081235
31395101347771247993090977182544419680302288301670999871775019583629340093225336279232334156591162405089423370293332938503614927923371409038903985006824060530046977993527032180145
4312598177184238464149433012663331328029785392686017294923834309127935293981313324226588209189575727229850653047762692879520954523000146727572212444716160318482388298089921136153987
39445752833268735695921970353099377985998041572412818652469123318902016220604726374993468828869910416050136892722032358600112334830120185206043471246885537555298675108455422297175
283819176208541527686096336861637763635841052392712980915116050296605321397601788081073219886114652950742768094126090837771168630066945654799824849841573854760068511831656678236773
42239359942327817503929974585405021707933888503918199529754825641962834350097967202850078023215851125397802718593113934856084148403423175835118185453312409819352197968538197931942
11327307533706321549974084398557958886170535252687944048938446246970822502522111931955453540748099919990731777695725251863361181157393103137370038375282903737918148461631104244217
384473866680312980648557405992829918402224806711890670740980232380160942405316723968310579144382175604814994637641970892953318582400398800115297382655225768812141495417822431756
47703911530124248146005368871109172774838450545386651972928553237977647945695419421680980624852412663095191559383097361027844798117997476208988614550058169169033835875774163063947
59710360939371828965052312164448649196981475924427498576932643701005195108402441713679112051095170437692914460455191472858718242240744341409127950083315145460315269115010164429759105909
818067271913207399151892925591010451692914096598801905213698122928943684047336939724377270641419830217596651577471698876359041036639533777816782559388557220811069791854616853105639
591453106792492297225082168162031886225470144049260526566207330868496358791450708024727306697416351710160225463375895600332872241892559989988945509930396772887649290514027827868870
199497201585168357474813128727907495419704421694379148254570312722262056885463887322136788631929085029813332294082133002499697293039593667281490832705356348682131036357611648520148
54346035113553027903494195071941363126534172696456279239618146076280989080642650611741223056547364562522424121203268590734224235177865635915951526382729464989461021751577752987297
274502869705430550690808114489291414384574225380169297146806543095890445893264707302775618688278353039083307755515031518243030863064508003549366759129372243430709027581223129186773
89476363720712798929081383973447731146116295330364900516154225038731611617130308037467602825649803075837158485556468873571184395444909900470296123796104489522659620032391793641687
08467809905472556511599679467199897535679365380986941005896653637317279708011016002992820403217054726945108966303615488146708481770162138363910958832658208272911165493726769529783
623855773705693360979120875291926768282460421500382566681416942896940885905768989956317144410200535558013094743892134679312861393169327139121678876986078358405239587633518713496111
814172319797767824187458089960530734533326510534699835066172252126759664086415944716562637677970389115113496402735636814040094973888033136230195101874863750294121789225645400778515
22679943713111761091657741699738156989581822273782791866874449956183411137879630130932409623522999235512283949444428186253458317401674256953727278119011522204180363070808921881653701
8056359575002683028432807784388163540052397134906708994375508012134125935652014020110300496355529859996343801557349346056941380756727077745426074650232299963437330015734960491749
411067365514102360593549235242283338556034399781430630494332767212802662591098347464203714810094328808847604246873384746860842874271212352745985375141455574659795324407975365508252
857975595273538291147801172583719436787996800609826695854881196727568437156765320787933564572849213917684369099676897450916675774628271089762894799776822515532017396664431408307454
79713267562618027480219539149088425360220052236880777260236460741286880610251276469171571291984572398060840905962362647663815848105221664913157153784480773680801721597764167500845
735200082250611176680160492980577432041963653069299986239831802828439649693764622886114067019903284975043836892652912655887871585004087533808334174688728185608804008399345242851659
112678517862160546965265948534272380536974943538766076502115845759872977914892736365963769043419440533544182872486374879731235947285651215429957330125735232520178443648509051749647
158110281346037542888209092016056952823515135720950059943237345364210843302043403071481958466226578424693053407088010022031872048032111564429607599391567093119565160793228589689
969264452258112078227714022203591193288075193028357572634097281363326808041713919568436392969632520432115640386564660620387831331981104573034392136036439695922440784013960040444133
874584901609361376582759864983733582432728627703723242198632132162372850810935303760255954582642147976502896193252071835345657126046576438677778817503419258184011411955002903006607



04646009175110292394963442048353560895869128093579619651554262173714461889263531591208807158997846732833685482768427576621457140025140116570583203576331962019658202969971108832003
301148302816915593770115230585956972372283673067861070426413296671683342380591177984019582714570702042538087602873334811208641139545157519762259671994985859565000050044816218776146
496504470290424739465518992222674313403346554475107278515622257452973926684836766551375703223912112071952816724164202824936736413418501504765915580189621938806961993112864644304816
917155545396300311642774241722348328605563206496759629401500530122029383262736065487528714403293678305711091187779530225235741081835483730481903338541645579162617251235409565117096
969467855508470965450492322258122418956235241442610286032763646617710734003234742172775164309037096095479260669499791606912089522645230207467719386100712957903732106870694625014481
576806492224373137788499696609911407837456954726276202134382664598453425145303317318379610677826631902198333459544742587042776827349577610477674115595528267468987767286854418781575
259773208910870969117995928114942376298911998467187531815726483581824662375691292292262325410398708618397511455124601633001647545174182189478171048028164063139722050377421261310561
097151362620277152700298401156547941515836075909401319363357207919870651464274900215568059534445690069156893885642870445512674987729244477935297014360076901409147839480961967075209
188632123933119947506785049070214980546427589633404070939537599775392772669366357391467301210226633647385467443028880834551415859013218767497130261686595597292919792767417525170753
186343175349628146860571175082439857249351910975529084694088200666098285349504877335839390607697187032677588353827983086669835629614294211160491687357440767659497111291921005308089
729039789497856828317866543176543867619806600174520465049204654021417496267844912378325413238824655804572924742851097004594945932063219548718644359331119029960685607426615625665204
912033366386153896344416435709957604945810426799004837146594414223149575587269187536826529813698024375642679409569700387762641785225201443910265870020367468949266953188680528270955
680485772987344296370711012086984366045275719612097987435065136564025061946025234060595205687841820330080399253152844273758065812012948401656054103935113345467638839998406909131821
901339848581511266593949175697774811925313166698198423213723209902564727560756767303288127929896468189845176925107232415781085196813636784056902808763661021815340323421412467001850
458578400000717109810647006604683496168276105354949756622011371068074023761867249624846739827209710619128142457517047598480399265438579943823714727759158561512198997258654468651792
048914909025937329442868965921282526683041397935828725161996696388158895215645977820120396210892072989869861766321221753661384755333864054748666075473837501869104962445470411070692
915984821454675965154872301683906190406429703826366948807351959443656902529535576894612806573516353411175881571446477692706488949806486748842891844712256030435199598372922381121839
923066335873075719984672883301488429636947679233363113548705017065217581359322069425017416725099490241195838364596054652033937804861552163337281377655195624633695842751240264257811
073495963678100285384058672967055036099704954011211865134286794188259315604058987221874693382395729770188410015988529287072888118613838558961959025593064592652378049653314884067693
4178380922833690430461907111298052730528764188305370655703579775799301610180716221529339609126431094102160823057450726178517402770080000030765297260149458579555849739002805671807173
095521217815824221525426110786933843324874375802504089144163422033672290831714573843831548900005886064440816103278109022940944148747237327793837923871333705077940770317565966625618
631715443389166657328633286344449954428970982365229644455211436775533544394846356595177307016576394008479124209385752756322157958841969704055596148870356337373414466956464123868880
5629355068912749439249699108091274182056857594181192958572733736253538918055549623176070304001711645555211438523448485328214172626336331046420471488559950754240776245861539351064841
639550557064003570863254203691466635135257173526466387201651804927027914274769760136829295982865093963084229756362145898716401708401537840234615931820107113216740009535227297628517
444944773809110289886177236649596847974364462281091345796793472807337125237602648189994961816516567182096641027180972036570879864853685047862887029987049335994131244234597998034789
387026384680738348250808563835508626102363192890961841795332750709226172359304837101041989508564599906796406269078911205399696263983721370639239520645335496845143181366100496237636
264815558261212815972242051722352955498501261897980505610902490885682176362654467405969492966007530241245809153489723260087318606392351496385703579694183639195448263594879324342266
399997444925237426696962215033705649218351401751005525851679754240119522169326115522838954640323859001253812669322757844711921946161657780442519746321022421461745511685629835127768
493547983850955293564066313422971791988556356663505191959634924807299749876943180645233062812318207247879798699206782747764569654688948335990150722434434611402641002479615227097611
335209858230165750740766054457282248010061367114187580766364601740504078970821322033896664534212834448280442453881485997902094864210675608228739221372940279219324985412867102840151
878083274294239949479059134424739168293115901981918039435144374176248734502956257548430270883761892535156232852618875815588663500264509733229290329642655941421204156546878257847491
383640969138041445321762339521732929797414828533686428298541166872984346782702179573723450138749564994496991621070285583347655231046970474737928825450783983525496168250565349598498
8729806081508393731170419533075337940967491768323146760352314848884621393167504020095236372215445057018688324527268363729500521123341674363939534254364274708663573948697189095150075
007853434993268214637450225328856821327701127381472014646761531035551428371888670676854663494147495334585123973928506068534449753134905374792744725889079961416009402995200709675906
275054235718365180820751932636675457600832906312599666131196280617217237312176257903015710369491398987817410482173534291459210214692023211234969830853657436417291999429228767369640
348680234793965440363269530939935447844267926518800275137602598614307664175830099082054006882490326162032368977673413109090264747142554849807501006495650094334199503220828108629701
414030390818171800403595335113505272843550577947327375218272062662117503097935451055985176460978889067684981613449570812674070284938312137931003187211253831991996227151951541740009
379483684256432078843373664682138098402265786488830490688651120315674634928941500480896702059334173680366578101490294833451302588232061805070890540120589445254855855643520184462914
088530951870952675099946145444032868966576599702737538971497290848538731979091565859652864679615006143515674988032348301877288539294041911033562244383292638238249943113338440166727
643551692365143846128853796904540694904457222652354411403142763255051419297944979547444737091976153737872492278228522809564718834660382073020403784320643732457259648051064306840602
478425022861286209055862508688166215000055752342118386970632769672653228078686478509770294595482333236648384876081812548643131776490467050408021228968186932599846027613583217184221
24693982935760193284148761689258881952423375056435988886960008340098805881561985926433658607211512262101191241691869178488161674931872288886677225813267994399950397404624449238219376
238417102544610143860155361791330522995158436044368373916589258972833876171470996529518922009926631269888203969445683954794189743984867169264209210826175361456380874646840936588832
358882313562061099983779535528471974469384717176854037311079255043957339256392977245085416889240040002664207369969841427584705057323037688693660670449424937716369423055491360251730
985249188393420300724727142962992182437273902681302889161057048579327438444163551190584599706290751213138111778802255630671054963299587845947682762653992297718778592501021619453982
939268675913730040422532296940756208332997188050307651421489166512881032740465863644788855394377680730985366326507621517281045194379493065795644102420841732549489941530058440205743
125834832500484226423760623089345472620184351026107968724165574877611743648560613044874939073152318125621645925104780260008374036368595905190524226982751865849017078578988681541251
646530635488907172292722974799905715150291657616258549623474440767298378453541337094182717496078862933528998083043657767806152682208900717538136143282425888559702274970494294854313
199958268076845090686255084862113252905391192851822124656884840739063270869993537408873576794735160677326171481502223586181351478319679536714133426861256283417405058811594707923970
359932306763100720115794749729861276823180496651600952042083021356561783577622843942541424950486608960618060538966044827902004199560556501141942635798951524908115555692548703164446
122118395737941892995939537853931293912938986858501634844315468786222154932017275088036139503592889850337661130272852334481539076977024046752757975411026161123375270188003529845567
957980472468069301693836864215327378854403064858152262711414811996199962731034709981509436909552136441765289973671635200354221368557613663886927356567100940798645793718024183891304
546851393448214088941351172516123715356946242349812310686191913761467701006910094281578791915740951201492012442581805153459839510873800516257292580379124510910568321207314697236378
273951494761509331693720743064253923486256015498416280525067104502786177046039327117697971616438139581035469816747826476956198352526989263540799420576558212973785593761700040697411
551800940166755990495239145545775985767523964893893825037158066183866294558704488278666437410832770164211449459687224292965991395038880842119887495111522859434271857294712754955497
183307144133632735453256109346931841628443350538053845737820397947059696287844628532323926269183010811083593862225932263435872644437571408683036826999431487907408412969375193417629
398442013979668905518631751104948237103607063091410585009596726855235719988194297109401674497100483819093788299301567662412593293939635438667620204814069968915603812971833832254227
800067654178705478309208286904834526993388431919301811785464018178965192227378732132488142924922483524056121322018952118501095575002556612538716825900125518305073857257763165008204
434357220991999112830591436329837123901545435336578414483729393169657543733938193814572142682001064160555657747261973888829811591647121884008442862032612035750051280973544712199944
526963641295957826641946490991373089429434398987472457734210106423460156869523304634624164557040530648257486973986406960752573332517286288408193587864823692116797041333774850316436
715860780272335013963049411554014295661878243787233455752056101733294598566871608190109804129190717304910326529101407065577688006821348012066161238558053625232381125643466636170364
495242279863856828259210100020615576919611322477077690629174186779186826335384670406568166992378558902938051680143186049250107536456259773865297853258647394722545440451136878985665
393273105804799247669639254603842517836820999664042171692364772576577153524001524585204444054988668754005130033591600259632404311772094993406939358747557108497705344341568995226744
887754444427445376519640089968247985121519450376945352391503181486611573550167525990300387596911703743881538655603914165583443303474590656418983434813506825816544739629229259194006
820292556482412149331504992916540339905592283906294957724240368044828199831298036017963358599749177154240513225303273150854818167207813916808180207227703037149535021876748485149322
677263424981017638520590183385599637035964811367265601843801324025769137431866576031656353159590698578635534699539755160219232708580093125088157171238017730484752181133885340618969
930284438892844327264068900889489497774423731691573345691024798396850214965401733504210389062174278330535114162792476015969462676761433456891074341956226904940023064589169608112418
871796873733859306858844854818981095753076476267710844027298523431980397412919147042150112013208839267823130537275500527979180816716919653276033053793249777993122581808525865075534
801002229064103355721311174376480271374948968355970995760901991402225297851825794340541061707066621137949323457463916309829662397666072978300499070356388855348435772692907736323558
513152141448167751724888537385952723750968868188872528434537047191871484021018652014793943675052912895140915701550974857982022582650067195109520566264436884545819216036322451839735
911728861604647798877326809703364504026830420273848521305019104319926004120037875945575258873546452159977486962603780566704486486853700810857107506635205021474949633103998943947117
457103579603878309125699825422727797650812383152563149187063516127931743461825825724733892791228015579940153695805914773343618215182109202559525718612749598503158843772802768775246
887004706979239291566674852431028074757069181177427994545659702920369776997161066167441831893617884970010921760736872329114857202130291026222825620785470031897784110102753993291920
107285871014120756256884412569132052369796365692694350188730612939999238593091081971605716325630549347321446829641837983820967278525430776425094413578994515376658949684863864760380
978602476491243198282356801254549099909180039744888027319943027702307194369677457089640760135500047860081894694760433591046323309343871330130930098177571791333892795135798214070349
888305040071049590244935813994977548277611233983926088101524529158902126503796602548577150287549375983144851223435423040878576517314870331369029827146813066947716523908259167494371
4934549959296806071252135118264366639478886660863594987457243183673693665924877375156435932671220215792771102713317700081234966907318842339855783792504760058444661948756448403262251
760742879086976118841169449661198799345771496903761161379945585818292795010411613926335005318453027166695115762285208631165801673770686447944464675639871505651304272428804514159107
459107686362004366719853556246545488218391967015498563836723661746633848697372917449414252523616693346721303654660239717563746590746096287468481658142336224300050094516025733795273
038616733705914832765240058758577898094426595516668117732906355883292199048252963158726008865554188277207984683283904722495028342345658783554955315824129609583666197257779148498129
837280768134207170928648501108320380276950889208061904736534664016603366571354957498618546305966264566434434133705767367417961620687465878162513819686502904550926470495893671960639
941784645640029927367860809417910917742879311701233696018740708577699224478783623154188027580743300700127027460322767270524056001245771481341212898154819425728539690393022801554492
743207796413395239178762263988249740977373188153440673325018542305575906154180686473276615945874086238042490244927444750104693292248952709916982033631671932713388117289351930598088
661286267050171612203399110283288950947449559928317835113387469470777738533466752569357352799830438728179950217796446259174120571006783749228012946655731914991294704425345255843200
604565060174992051799242202719724725125012690109864373645621543442257145210183118877688068630298971337856633004406809998551939174244663374938947039037524577925669966030326543565207
2678728835138492561669543896048155005994630144292500354883118973723406626719455081800