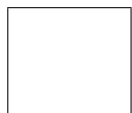


APELLIDOS, NOMBRE: _____

Ejercicio 1 **Ejercicio 2** **Ejercicio 3** **FINAL**



30 puntos



30 puntos



40 puntos



100

Razonar debidamente las respuestas

1. Sean a, b dos enteros no nulos distintos libres de cuadrados. Decide de manera razonada si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. No puedes utilizar una de las afirmaciones de un apartado en otro apartado sin haberlo probado previamente.

a) $\mathbb{Q}(\sqrt{a} + \sqrt{b}) = \mathbb{Q}(\sqrt{a + b + 2\sqrt{ab}})$.

b) $\mathbb{Q}(\sqrt{a} - \sqrt{b}) = \mathbb{Q}(\sqrt{a + b + 2\sqrt{ab}})$.

c) $\mathbb{Q}(\sqrt{a} + \sqrt{b}) = \mathbb{Q}(\sqrt{a}, \sqrt{b})$.

d) $[\mathbb{Q}(\sqrt{a} + \sqrt{b}) : \mathbb{Q}] = 4$.

e) El polinomio mínimo de $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ sobre \mathbb{Q} es $x^4 - 2(a + b)x^2 + (a - b)^2$.

2. Sea $f(x) = x^{12} - x^{10} - 2x^8 - x^4 + x^2 + 2$ y L el cuerpo de descomposición de $f(x)$ sobre \mathbb{Q} .

a) Calcular $[L : \mathbb{Q}]$.

b) Calcular una base de L como \mathbb{Q} -espacio vectorial.

c) Describir los \mathbb{Q} -automorfismos de L .

d) ¿Es $\text{Gal}(L/\mathbb{Q})$ resoluble?

e) Para cada uno de los cuerpos de números K/\mathbb{Q} tal que $K \subseteq L$ determinar $\text{Gal}(L/K)$ como un subgrupo de $\text{Gal}(L/\mathbb{Q})$.

f) Calcular $\alpha \in \mathbb{C}$ tal que $L = \mathbb{Q}(\alpha)$. Calcular el polinomio mínimo de α sobre \mathbb{Q} .

3. Sea $f(x) = x^{14} - 1$ y L el cuerpo de descomposición de $f(x)$ sobre \mathbb{Q} .

a) Calcular $[L : \mathbb{Q}]$.

b) Calcular una base de L como \mathbb{Q} -espacio vectorial.

c) Calcular $\alpha \in \mathbb{C}$ tal que $L = \mathbb{Q}(\alpha)$. Calcular el polinomio mínimo de α sobre \mathbb{Q} .

d) Describir los \mathbb{Q} -automorfismos de L en términos de α .

e) Para cada uno de los cuerpos de números K/\mathbb{Q} tal que $K \subseteq L$ calcular un elemento primitivo como combinación de elementos de la base del apartado b).

f) Calcular el polinomio mínimo sobre \mathbb{Q} de cada uno de los elementos primitivos calculados en el apartado anterior.