TEORÍA DE GALOIS

Grado en Matemáticas
Curso 2022–23

Examen
13-1-2023

Apellidos, Nombre: ____

Ejercicio 1	**Ejercicio 2**	**Ejercicio 3**	**FINAL**
20 puntos	30 puntos	50 puntos	100

Razonar debidamente las respuestas

---

1. Sea $f(x) = x^3 - 3\sqrt[3]{2}x - 2 \in \mathbb{R}[x]$ y $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{C}$ sus raíces.

a) Demostrar que $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$.

b) Demostrar que $f(x)$ es resoluble por radicales.

c) Expresar $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ mediante radicales.

d) Sea L un cuerpo de descomposición de $f(x)$ sobre $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$. Calcular $\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}))$.

---

2. Los polinomios de Chebyshev $T_n(x)$ se definen de forma recursiva como:

$$\begin{aligned} T_0(x) &= 1, \\ T_1(x) &= x, \\ T_{n+2}(x) &= 2xT_{n+1}(x) - T_n(x). \end{aligned}$$

a) Demostrar que se verifica $T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta)$ para todo $n \geq 0$ y para todo $\theta \in \mathbb{R}$.

b) Demostrar que para todo $n \neq 0$ el número $\cos(2\pi/n)$ es algebraico.

(*Sugerencia:* $\cos\theta + \cos\phi = 2\cos\frac{\theta+\phi}{2}\cos\frac{\theta-\phi}{2}$)

c) ¿Es $\cos(2\pi/5)$ expresable por radicales? En caso afirmativo dar su expresión mediante radicales.

---

3. Sean $f(x) = x^7 - 7 \in \mathbb{Q}[x]$ y L un cuerpo de descomposición de $f(x)$ sobre $\mathbb{Q}$.

a) Calcular el grado de la extensión $L/\mathbb{Q}$ y encontrar generadores suyos.

b) Describir los $\mathbb{Q}$-automorfismos de L en términos de los generadores de $L/\mathbb{Q}$ calculados anteriormente.

c) ¿Es abeliano $\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})$?

d) ¿Es $\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})$ resoluble?

e) Calcular 10 subextensiones de $L/\mathbb{Q}$ junto con sus generadores y sus grados. De las cuales al menos una para cada grado divisor de $[L : \mathbb{Q}]$.
