TEORÍA DE GALOIS

Grado en Matemáticas
Curso 2022–23

Examen
21-10-2022

Apellidos, Nombre: ______________________________

Ejercicio 1	Ejercicio 2	Ejercicio 3	Ejercicio 4	Ejercicio 5	FINAL
15 puntos	20 puntos	20 puntos	20 puntos	25 puntos	100

Razonar debidamente las respuestas

Problema 1. Decide de manera razonada si la siguiente afirmación es verdadera o falsa.

- Sea L/K un extensión de cuerpos tal que $[L : K]$ es primo. Entonces si $\alpha \in L$ tal que $\alpha \notin K$ se tiene $L = K(\alpha)$.

Problema 2. Sea $\alpha = \tan(2\pi/5)$. Calcular $[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}]$.
(Sugerencia: $(\cos(2k\pi/n) + i\mathrm{sen}(2k\pi/n))^n = 1$).

Problema 3. Sean K un cuerpo y $f(x) = x^n - a \in K[x]$. Supongamos que $f(x)$ es irreducible en $K[x]$. Dados un divisor m de n y una raíz α de $f(x)$, calcular el polinomio mínimo de α^m sobre K.

Problema 4. Calcular el polinomio mínimo de $\alpha = \beta^2 + \beta$ sobre $\mathbb{Q}$, donde $\beta \in \mathbb{C}$ es raíz del polinomio $f(x) = x^3 + 3x^2 - 3$.

Problema 5. Sean L/K una extensión de cuerpos y $\alpha \in L$ un elemento no nulo algebraico sobre K.

(i) Demostrar que $n = [K(\alpha) : K]$ para cierto $n \in \mathbb{N}$.

(ii) Demostrar que la aplicación $f_\alpha : K(\alpha) \longrightarrow K(\alpha)$, $x \mapsto \alpha x$ es un isomorfismo de K-espacios vectoriales.

(iii) Demostrar que $\mathcal{B} = \{1, \alpha, \ldots, \alpha^{n-1}\}$ es una base de $K(\alpha)$ como K-espacio vectorial.

(iv) Calcular $M_{\mathcal{B}}(f_\alpha)$, la matriz de la aplicación f_α con respecto a la base $\mathcal{B}$.

(v) Demostrar $p_{\alpha/K}(x) = (-1)^n p_{f_\alpha}(x)$, donde $p_{f_\alpha}(x)$ es el polinomio característico del endomorfismo f_α (i.e. $p_{f_\alpha}(x) = |f_\alpha - x\,\mathrm{id}_{K(\alpha)}|$).
