TEORÍA DE GALOIS (16-10-2022)	Grado en Matemáticas Curso 2022–23	Hoja nº 3

Extensiones de Galois.

1. Construye cuerpos de descomposición sobre $\mathbb{Q}$ de los polinomios x^3-1, x^4+5x^2+5 y x^6-8 y calcula el grado de la extensión correspondiente.

2. Sean $f(x)=(x^2-3)(x^3+1)\in\mathbb{Q}[x]$ y $g(x)=(x^2-2x-2)(x^2+1)\in\mathbb{Q}[x]$. Demuestra que $\mathbb{Q}(\sqrt{3},i)$ es cuerpo de descomposición de f y g sobre $\mathbb{Q}$.

3. Demuestra que $\mathbb{Q}(\sqrt{2},i)$ es un cuerpo de descomposición de $x^2-2\sqrt{2}x+3$ sobre $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$.

4. Demuestra que $K=\mathbb{F}_2[x]/\langle x^3+x+1\rangle$ es el cuerpo de descomposición de x^3+x+1 y x^3+x^2+1 sobre $\mathbb{F}_2$.

5. Decide si las siguientes extensiones son normales: $\mathbb{Q}(\sqrt{5}i)/\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}(\sqrt{5})/\mathbb{Q}$ y $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{5})/\mathbb{Q}$.

6. Demuestra que $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ no es una extensión normal de $\mathbb{Q}$. Encuentra una extensión normal de $\mathbb{Q}$ que contenga a $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ como un subcuerpo.

7. Demuestra que $\mathbb{Q}(\xi_5)$, donde $\xi_5=e^{2\pi i/5}$, es una extensión normal de $\mathbb{Q}$.

8. Prueba que toda extensión de grado 2 es normal.

9. Si M/L y L/K son extensiones normales, demuestra M/K no es necesariamente normal.

10. Decide justificadamente si cada una de las siguientes afirmaciones es verdadera o falsa:

a) Sea K un cuerpo y sea $p(x)\in K[x]$. Entonces existe una extensión de K donde $p(x)$ tiene una raíz.

b) Sea K un cuerpo y $p(x)\in K[x]$. Entonces existe una extensión de K donde $p(x)$ se descompone completamente..

c) Supongamos que $f(x)\in K[x]$ se descompone completamente en $K[x]$, supongamos que $p(x)\in K[x]$ no es constante y que $p(x)$ divide a $f(x)$ en $K[x]$. Entonces $p(x)$ se descompone completamente en $K[x]$.

d) Supongamos que $K\subseteq L\subseteq M$ son extensiones de cuerpos. Sea $f(x)\in K[x]$ no constante. Si M es cuerpo de descomposición de $f(x)$ sobre K, entonces M es cuerpo de descomposición de $f(x)$ sobre L.

e) Si $L=K(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ y $\sigma\in\mathrm{Aut}(L/K)$ tal que $\sigma(\alpha_i)=\alpha_i$ para todo i, entonces $\sigma=\mathrm{id}_L$.

f) Sean M/L y L/K extensiones normales. Si todo $\sigma\in\mathrm{Aut}(L/K)$ se puede extender a un automorfismo de M, entonces M es normal sobre K.

11. Calcula los siguientes grupos de automorfismos:

$$\mathrm{Aut}(\mathbb{Q}),\qquad \mathrm{Aut}(\mathbb{R}/\mathbb{Q}),\quad \text{y}\quad \mathrm{Aut}(\mathbb{C}/\mathbb{R}).$$

12. Indica cuáles de los siguientes polinomios son separables sobre $\mathbb{Q}$, $\mathbb{F}_2$, $\mathbb{F}_3$ y $\mathbb{F}_5$:

$$x^3+1,\quad x^2+x+1,\quad x^4+x^3+x^2+x+1.$$

13. Sea $K = \mathbb{F}_2[x]/\langle x^2 + x + 1\rangle$. Demuestra que $K/\mathbb{F}_2$ es separable.

14. Demuestra que $\mathbb{F}_2(t)/\mathbb{F}_2(t^2)$ no es separable.

15. ¿Cuántas raíces distintas tiene $x^{12} + 2x^6 + 1 \in \mathbb{F}_3[x]$ en su cuerpo de descomposición?

16. Construye cuerpos finitos con 8, 9, 25 y 27 elementos.

17. Prueba que para cada primo p y para cada entero positivo n, existe al menos un polinomio irreducible $f \in \mathbb{F}_p[x]$ de grado n.

18. Sea $f(x) = x^q - x \in \mathbb{F}_p[x]$ con $q = p^n$.

a) Demuestra que cualquier polinomio irreducible en $\mathbb{F}_p[x]$ de grado n divide a $f(x)$.

b) Demuestra que el grado de todos los factores irreducibles de $f(x)$ divide a n.

19. Responde, de manera razonada, a las siguientes preguntas:

a) Si en $\mathbb{F}_2[x]$ consideramos $f(x) = x^3 + x + 1$, demuestra que $K = \mathbb{F}_2[x]/\langle f(x)\rangle$ es un cuerpo finito y enumera sus elementos. Halla el inverso del elemento $x^2+x+1+\langle f(x)\rangle \in K$. Comprueba que el grupo multiplicativo de K es cíclico.

b) Halla un generador del grupo multiplicativo del cuerpo $K = \mathbb{F}_3[x]/\langle x^2 + 1\rangle$ y expresa todo elemento de $K^\times$ como potencia de dicho generador.

20. Sea L/K una extensión de grado 2. Si la característica de K no es 2, prueba que existe un $u \in L$ de modo que $L = K(u)$ y $u^2 \in K$. Muestra que la hipótesis sobre la característica es necesaria.

21. Sea K es un cuerpo de característica p y $a \in K$. Demuestra que el polinomio $p(x) = x^p - x + a$ o bien se se descompone completamente en $K[x]$ o bien es irreducible.

22. Sea p un número primo y $a \in \mathbb{Z}$ no divisible por p. Se definen los polinomios de Artin-Schreier como $AS(x) = x^p - x + a$. Demuestra que o bien descomponen completamente o bien son irreducibles.
Sugerencia: usa reducción de coeficientes módulo p, considera un cuerpo de descomposición sobre $\mathbb{F}_p$ y aplica el pequeño teorema de Fermat para obtener todas las raíces.

23. Encuentra la menor extensión normal de $\mathbb{Q}$ que contiene a $\sqrt{2} + \sqrt[3]{2}$.

24. Encuentra el grupo de automorfismos sobre $\mathbb{Q}$ del cuerpo de descomposición de los siguiente polinomios :

$$x^{12} - 1, \quad x^4 - 2, \quad x^4 + x^2 - 6, \quad (x^3 - 2)(x^2 - 2). \quad x^p - 1,$$

donde $p \in \mathbb{N}$ es un número primo.

25. Demuestra que la extensión $\mathbb{C}(x)/\mathbb{C}(x^6)$ es normal y calcula su grupo de automorfismos.

26. Sea $f(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 \in \mathbb{Q}[x]$. Calcula el cuerpo de descomposición L de $f(x)$ sobre $\mathbb{Q}$ y el grupo de automorfismos $\mathrm{Aut}(L/\mathbb{Q})$.

27. Encuentra elementos primitivos en el caso de las siguientes extensiones:

a) $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, i)/\mathbb{Q}$.

b) $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, i, \sqrt[3]{5})/\mathbb{Q}$.

c) $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, i, \sqrt[3]{2})/\mathbb{Q}(i)$.