TEORÍA DE GALOIS (20-9-2022)	**Grado en Matemáticas** **Curso 2022–23**	**Hoja** **nº** $\mathbf{1}_b$

Polinomios.

1. Sea K un cuerpo. Demuestra:

a) Todo ideal en $K[x]$ es principal.

b) Un ideal $I \subset K[x]$ es maximal si y sólo si está generado por un elemento irreducible.

c) En $K[x]$ todo elemento irreducible es primo.

d) Todo polinomio en $K[x]$ se puede escribir como producto de un número finito de irreducibles, siendo la expresión única salvo orden de los factores y/o producto por unidades

2. Calcula un generador para cada uno de los siguientes ideales en los anillos indicados:

a) $I = \langle x^2, x^3 - x, x^2 - 1\rangle$ en $\mathbb{Q}[x]$.

b) $I = \langle x^3 - 1, x^3 - x, x^2 - 1\rangle$ en $\mathbb{R}[x]$.

3. Considera un cuerpo K. Demuestra los siguientes enunciados:

a) Demuestra que todo polinomio de grado 1 en $K[x]$ es irreducible y tiene una raíz en K.

b) (Teorema de Ruffini) Sean $p(x) \in K[x]$ y $a \in K$. Entonces $p(a) = 0$ si y sólo si $p(x) \in \langle x - a\rangle$.

c) Todo polinomio de grado dos o tres es irreducible en $K[x]$ si y sólo si no tiene raíces en K.

d) ¿Es cierto el apartado anterior si el grado del polinomio es mayor que tres?

e) Sea $a \in K$. Un polinomio $p(x) \in K[x]$ es irreducible si y sólo si $q(x) = p(x + a)$ lo es.

f) Sea $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$ en $K[x]$ con $a_0 \cdot a_n \neq 0$. Entonces, f es irreducible si y sólo si $a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_n$ es irreducible.

4. Demuestra que el polinomio $x^4 - 10x^2 + 1$ es irreducible en $\mathbb{Q}[x]$ y sin embargo es reducible en $\mathbb{F}_p[x]$ para todo primo p.
Sugerencia: Observa que ó bien 2 *ó* 3 *son cuadrados en* $\mathbb{F}_p$*, ó bien* 6 *es un cuadrado en* $\mathbb{F}_p$*.*

5. Demuestra que para cada $n \geq 1$ hay infinitos polinomios en $\mathbb{Q}[x]$ irreducibles de grado n.

6. Decide razonadamente si los siguientes polinomios son reducibles en $\mathbb{Q}[x]$:

$$\begin{array}{llll} x^4 + 3x + 6, & x^4 + x^2 + 1, & x^3 + 11^{11}x + 13^{13}, & x^3 + x + 1 \\ x^4 - x^3 - x - 1, & \frac{1}{3}x^5 + \frac{5}{2}x^4 + \frac{3}{2}x^3 + \frac{1}{2}, & x^5 - 9x^2 + 1. & \end{array}$$

7. Demuestra que todo polinomio irreducible $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ tiene grado 1 ó 2.

8. Factoriza el polinomio $x^4 - 1$ como producto de polinomios mónicos irreducibles sobre $\mathbb{R}$ y sobre $\mathbb{C}$.

9. Factoriza como producto de polinomios mónicos irreducibles en $\mathbb{F}_2[x]$ y en $\mathbb{F}_3[x]$ los polinomios:

$$f_1(x) = x^4-1, \quad f_2(x) = x^4+x^3-x^2, \quad f_3(x) = x^6+x^2+1, \quad f_4(x) = x^3-x+1, \quad f_5(x) = x^5-x^2+1.$$

10. Demuestra que $x^{p-1} - 1$ factoriza como producto de $p - 1$ polinomios mónicos de grado uno en $\mathbb{F}_p[x]$.