Repaso de Teoría de Anillos.

1. Demuestra que el conjunto $S = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}, \bar{8}\}$ con las operaciones suma y producto módulo 10 es un anillo. ¿Cuál es su unidad? ¿Es un cuerpo?

2. Sea R un anillo (conmutativo con unidad). Demuestra que R es un cuerpo si, y solo si, sus únicos ideales son $\{0\}$ y R.

3. Sea n un número natural. Demuestra que $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ es un cuerpo si, y solo si, n es primo.

4. Decide de manera razonada si los siguientes anillos son cuerpos:

a) $R_1 = \{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Q}\}$.

b) $R_2 = \{a + b\xi : a, b \in \mathbb{F}_3,\ \xi^2 = -1\}$.

c) $R_3 = \{a + b\mu : a, b \in \mathbb{F}_5,\ \mu^2 = 2\}$.

5. Dados $I = \{(3x, y) : x, y \in \mathbb{Z}\}$ y $J = \{(a, 0) : a \in \mathbb{Z}\}$, demuestra que I es un ideal maximal y J es un ideal primo no maximal de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

6. ¿Cuántos elementos tiene el anillo $\mathbb{Z}[i]/\langle 2i \rangle$? ¿Se trata de un cuerpo?

7. Sea $R = \mathbb{Z}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$. Considera el anillo $S = R/2R$.

a) Calcula cuántos elementos tiene S.

b) Encuentra todos los ideales de S.

8. Prueba que $I = \langle 2, x \rangle \subseteq \mathbb{Z}[x]$ no es un ideal principal.

9. Fijado un entero $n \in \mathbb{Z}$ con $n \geq 2$, demuestra que el anillo cociente $\mathbb{Z}[x]/n\mathbb{Z}[x]$ es isomorfo a $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})[x]$. Concluye que el ideal $\langle n \rangle$ es primo si, y solo si, n es un número primo.

10. Demuestra que en $\mathbb{Z}[x]$:

a) el ideal $\langle 5, x + 2 \rangle$ es maximal y que el anillo cociente $\mathbb{Z}[x]/\langle 5, x + 2 \rangle$ es isomorfo a $\mathbb{F}_5$.

b) $\langle 2, x^2 + x + 1 \rangle$ es maximal, y que el anillo cociente es un cuerpo que contiene estrictamente a $\mathbb{F}_2$.

c) $\langle 5, x^2 - 3 \rangle$ es maximal, y que el anillo cociente es un cuerpo con 25 elementos.

11. Demuestra que en $\mathbb{F}_2[x]$ el ideal $I = \langle x^3 + 1, x^2 + 1 \rangle$ es principal.

12. ¿Cuántos elementos tiene el anillo $\mathbb{F}_3[x]/\langle x^2 + x + 1 \rangle$? ¿Se trata de un cuerpo?

13. Sea $p(x) = (x^2 + 1)(x^4 + 2x + 2) \in \mathbb{Q}[x]$ y $R = \mathbb{Q}[x]/\langle p(x) \rangle$ y $\bar{f} = f + \langle p(x) \rangle$.

a) Describe los ideales en R. ¿Es R un cuerpo?

b) Decide justificadamente si $\overline{x}$ y $\overline{x+1}$ son divisores de cero en R.

c) Decide si $\overline{x}$ y $\overline{x+1}$ son elementos invertibles en R y, en caso afirmativo, encuentra sus inversos.

14. Sea K un cuerpo. El subcuerpo más pequeño de K recibe el nombre de *subcuerpo primo de* K. Si $\mathrm{char}(K) = 0$ el subcuerpo primo es isomorfo $\mathbb{Q}$; mientras que si $\mathrm{char}(K) = p$, para algún primo p, es isomorfo a $\mathbb{F}_p$.

a) Sean K y L dos cuerpos. Si $f : K \to L$ es un homomorfismo entonces f induce un isomorfismo entre los subcuerpos primos de K y L.
En particular no existe ningún homomorfismo de anillos $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{F}_p$ para ningún primo $p \in \mathbb{Z}$; ni tampoco existe ningún homomorfismo de anillos $f : \mathbb{F}_p \to \mathbb{Q}$ para ningún primo $p \in \mathbb{Z}$.

b) Demuestra que el único homormofismo de anillos $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ es la identidad. Y lo mismo para $f : \mathbb{F}_p \to \mathbb{F}_p$.

15. Decide de manera razonada si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

a) No existe ningún homomorfismo de anillos $f : \mathbb{Q}[i] \to \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$.

b) Existen infinitos homomorfismos de anillos $f : \mathbb{Q}[x] \to \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$.

c) No existe ningún homomorfismo de anillos $f : \mathbb{R} \to \mathbb{Q}$.

16. Sea $R \subset T$ una inclusión de anillos y sea $b \in T$. Consideramos la función:

$$\begin{array}{rccc} f: & R[x] & \to & T \\ & p(x) & \mapsto & p(b). \end{array}$$

a) Demuestra que f es un homomorfismo de anillos. Llamado homomorfismo de evaluación.

b) Describe $\ker(f)$ en los casos siguientes:

(i) $R = \mathbb{Q}$, $T = \mathbb{R}$, $b = 5$.

(ii) $R = \mathbb{Q}$, $T = \mathbb{R}$, $b = \sqrt[3]{2}$.

(iii) $R = \mathbb{R}$, $T = \mathbb{C}$, $b = i$.