CONJUNTOS Y NÚMEROS (19-11-2022)	Grado en Matemáticas Curso 2022–23	Hoja nº 7_a

Teoría de Números Elemental

1. Sean $a, b, c \in \mathbb{Z}$ con $a, c \neq 0$. Demostrar:
a) Si $b = 0$ entonces $a|b$.

b) Si $b \neq 0$ y $a|b$ entonces $|a| \leq |b|$.

c) Si $c|a$ y $c|b$ entonces $c|(ax + by)$ para todo $x, y \in \mathbb{Z}$.

d) $a|b$ si y sólo si $a|(ac + b)$.

e) $a|b$ si y sólo si $ac|bc$.

2. Sea $n \in \mathbb{N}$. Demostrar que los números $8n + 3$ y $3n + 1$ son coprimos.

3. Sabemos que, dados dos enteros positivos a y b, existen primos $p_1, \ldots, p_s$ de modo que $a = p_1^{\alpha_1} \cdots p_s^{\alpha_s}$ y $b = p_1^{\beta_1} \cdots p_s^{\beta_s}$ para algunos $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ (Teorema fundamental de la aritmética). Se pide:
a) Expresar el $\mathrm{mcd}(a, b)$ y el $\mathrm{mcm}(a, b)$ en función de estas factorizaciones.

b) Demostrar que $ab = \mathrm{mcd}(a, b) \cdot \mathrm{mcm}(a, b)$.

c) Hallar el máximo común divisor de 1547 y 3059 usando dos procedimientos: el descrito en a) y el algoritmo de Euclides.

4. Sean a, b, m números naturales con a y b coprimos. Demuestre que:

$$\text{Si} \quad a \mid m \quad \wedge \quad b \mid m \implies ab \mid m$$

Encuentre un ejemplo que muestre que esto puede no ser cierto si a y b no son coprimos.

5. Encontrar todos los pares de enteros a, b tales que $\mathrm{mcd}(a, b) = 10$ y $\mathrm{mcm}(a, b) = 100$.

6. Sean $a_1, a_2, b \in \mathbb{Z}$ no nulos. Demostrar que $\mathrm{mcd}(a_1a_2, b) = 1$ si y sólo si $\mathrm{mcd}(a_1, b) = 1$ y $\mathrm{mcd}(a_2, b) = 1$. **7.** Sea $n = p_1^{n_1} p_2^{n_2} \cdots p_s^{n_s}$ la descomposición de n en factores primos. Utilizando la unicidad de la descomposición en primos, demostrar que n tiene $(n_1 + 1)(n_2 + 1) \cdots (n_s + 1)$ divisores positivos.

8. Demostrar que existen infinitos enteros primos de la forma $4n - 1$ y de la forma $6n - 1$.

9. Se pide hallar el conjunto de soluciones de las siguientes ecuaciones diofánticas:
a) $110x + 55y = 22$, b) $111x + 36y = 15$, c) $10x + 26y = 1224$, d) $6x + 10y = 20$.

10. He comprado bolígrafos a 55 céntimos y rotuladores a 71 céntimos. Si me he gastado en total 20 euros, ¿cuántos he comprado de cada? Se pide justificar la respuesta.

11. Tengo una bolsa con 30 caramelos y los voy a repartir entre mis sobrinos, dándoles 2 caramelos a cada niño y 7 a cada niña. ¿Cuántos sobrinos tengo si la menor de mis sobrinas se llama Silvia y los mayores de mis sobrinos se llaman Pablo y Julián?

12. Se dice que un entero positivo es *perfecto* si es igual a la suma de sus divisores propios (todos menos él mismo). Demostrar que si $2^n - 1$ es primo entonces $2^{n-1}(2^n - 1)$ es un número perfecto.

13. Sea $n \in \mathbb{N}$. Demostrar las identidadades:

$$\begin{aligned} x^n - 1 &= (x-1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1), \\ x^{2k+1} + 1 &= (x+1)(x^{2k} - x^{2k-1} + \cdots - x + 1). \end{aligned}$$

14. Demostrar que si $2^n - 1$ es primo, entonces n es primo.
Los primos de la forma $M_p = 2^p - 1$ reciben el nombre de *primos de Mersenne*.

15. Demostrar que si $2^n + 1$ es primo, entonces n es una potencia de 2.
Los primos de la forma $F_k = 2^{2^k} + 1$ se denominan *primos de Fermat*.