CONJUNTOS Y NÚMEROS (7-11-2022)	Grado en Matemáticas Curso 2022–23	Hoja nº 6_o

Números

1. Sea $\widehat{\mathbb{N}} = \mathbb{N} \cup \{0\}$. Se define en $\widehat{\mathbb{N}} \times \widehat{\mathbb{N}}$ la relación

$$(n, m) \sim (r, s) \Longleftrightarrow n + s = m + r.$$

a) Demuestra que es una relación de equivalencia.

El conjunto cociente $\widehat{\mathbb{N}} \times \widehat{\mathbb{N}}/\!\sim$ lo denotamos por $\mathbb{Z}$, en el definimos las operaciones:

$$\begin{aligned} [(n, m)] + [(r, s)] &= [(n + r, m + s)], \\ [(n, m)] \cdot [(r, s)] &= [(nr + ms, ns + mr)]. \end{aligned}$$

b) Demuestra que las anteriores operaciones están bien definidas.

c) Demuestra que $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ es un anillo conmutativo con unidad.

2. En $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$ se define la relación

$$(a, b) \sim (c, d) \Longleftrightarrow ad = bc.$$

a) Demuestra que es una relación de equivalencia.

El conjunto cociente $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})/\!\sim$ lo denotamos por $\mathbb{Q}$, en el definimos las operaciones:

$$\begin{aligned} [(a, b)] + [(c, d)] &= [(ad + bc, bd)], \\ [(a, b)] \cdot [(c, d)] &= [(ac, bd)]. \end{aligned}$$

b) Demuestra que las anteriores operaciones están bien definidas.

c) Demuestra que $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ es un cuerpo.

3. Sean α y β cortaduras de Dedekind (i.e. $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_D$). Se define la relación

$$\alpha \preceq \beta \Longleftrightarrow \alpha \subseteq \beta.$$

Se nota por $\alpha \prec \beta$ si $\alpha \preceq \beta$ y $\alpha\ e\beta$.

a) $(\mathbb{R}_D, \preceq)$ es un conjunto ordenado. Es decir, $\preceq$ es una relación de orden en $\mathbb{R}_D$.

b) Demostrar que si $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_D$, entonces $\alpha = \beta$, $\alpha \prec \beta$ o $\beta \prec \alpha$.

c) $(\mathbb{R}_D, \preceq)$ es un conjunto totalmente ordenado.

4. Sea $A \subset \mathbb{R}$ un subconjunto acotado superiormente (i.e. $\exists M \in \mathbb{R}_D$ tal que $a \preceq M$ para todo $a \in A$). Demostrar que A tiene un supremo. (*Sugerencia:* Demostrar que $\gamma = \cup_{\alpha \in A} \alpha \in \mathbb{R}_D$ es el supremo)

5. Dado $r \in \mathbb{Q}$ se define la cortadura asociada a r como:

$$r^\star := \{q \in \mathbb{Q} \,:\, q < r\}.$$

Demostrar que $r^\star \in \mathbb{R}_D$.

6. Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_D$. Se define la suma de α y β como

$$\alpha + \beta := \{p + q \,:\, p \in \alpha, q \in \beta\}.$$

Demostrar

a) $\alpha + \beta \in \mathbb{R}_D$.

b) $\alpha + \beta = \beta + \alpha$.

c) $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$, para $\gamma \in \mathbb{R}_D$.

d) $\alpha + 0^\star = \alpha$.

e) Existe una única cortadura $\widehat{\alpha} \in \mathbb{R}_D$ tal que $\alpha + \widehat{\alpha} = 0^\star$. Denotaremos $-\alpha := \widehat{\alpha}$.

Conclusión: $(\mathbb{R}_D, +)$ es un grupo abeliano.

7. Sea $\alpha \in \mathbb{R}_D$. Demostrar que si $\alpha \preceq 0^\star$ entonces $0^\star \preceq -\alpha$.

8. Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_D$. Si $0^\star \preceq \alpha$ y $0^\star \preceq \beta$, se define el producto de α y β como

$$\alpha \cdot \beta := \{p + q \,:\, p \in \alpha, q \in \beta\}.$$

Si $0^\star \preceq \alpha$ y $\beta \preceq 0^\star$ como $\alpha \cdot \beta := -(\alpha \cdot (-\beta))$.
Si $\alpha \preceq 0^\star$ y $0^\star \preceq \beta$ como $\alpha \cdot \beta := -((-\alpha) \cdot (\beta))$.
Si $\alpha \preceq 0^\star$ y $\beta \preceq 0^\star$ como $\alpha \cdot \beta := (-\alpha) \cdot (-\beta)$.
Demostrar:

a) $\alpha \cdot \beta \in \mathbb{R}_D$.

b) $\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$.

c) $(\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma = \alpha \cdot (\beta \cdot \gamma)$, para $\gamma \in \mathbb{R}_D$.

d) $\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$, para $\gamma \in \mathbb{R}_D$.

e) $\alpha \cdot 0^\star = 0^\star$.

f) $\alpha \cdot \beta = 0^\star \iff \alpha = 0^\star$ o $\beta = 0^\star$.

g) $\alpha \cdot 1^\star = \alpha$.

h) Si $\alpha \neq 0^\star$, existe una única cortadura $\widetilde{\alpha} \in \mathbb{R}_D$ tal que $\alpha \cdot \widetilde{\alpha} = 1^\star$.

Conclusión: $(\mathbb{R}_D \setminus \{0^\star\}, \cdot)$ es un grupo abeliano.
Conclusión: $(\mathbb{R}_D, +, \cdot)$ es un cuerpo totalmente ordenado y completo.

9. Sean $p, q \in \mathbb{Q}$. Demostrar:

a) $(p + q)^\star = p^\star + q^\star$.

b) $(p \cdot q)^\star = p^\star \cdot q^\star$.

c) $p^\star \preceq q^\star \iff p \leq q$.

Conclusión: $\mathbb{R}_D$ extiende $\mathbb{Q}$.

10. Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_D$ tales que $\alpha \preceq \beta$. Entonces existe $q \in \mathbb{Q}$ tal que $\alpha \prec q^\star \prec \beta$.
Conclusión: $\mathbb{Q}$ es denso en $\mathbb{R}_D$.

11. Sea $\mathcal{C}$ el conjunto de sucesiones $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de Cauchy con $x_n \in \mathbb{Q}$ y $\mathcal{C}_0 \subset \mathcal{C}$ el subconjunto de aquellas sucesiones que convergen a 0. Definimos la relación en $\mathcal{C}$ siguiente:

$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \Longleftrightarrow (x_n - y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{C}_0.$$

a) Demuestra que es una relación de equivalencia.

El conjunto cociente $\mathcal{C}/\!\sim$ lo denotamos por $\mathbb{R}_C$ en el definimos las operaciones:

$$\begin{aligned} [(x_n)_{n\in\mathbb{N}}] + [(y_n)_{n\in\mathbb{N}}] &= [(x_n + y_n)_{n\in\mathbb{N}}], \\ [(x_n)_{n\in\mathbb{N}}] \cdot [(y_n)_{n\in\mathbb{N}}] &= [(x_n \cdot y_n)_{n\in\mathbb{N}}], \end{aligned}$$

b) Demuestra que las anteriores operaciones están bien definidas.

c) Demuestra que $(\mathbb{R}_C, +, \cdot)$ es un cuerpo.

12. Definimos

$$\mathbb{R}_W = \left\{ a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n 10^{-n} \,:\, a_0 \in \mathbb{Z},\, a_n \in \{0, \ldots, 9\},\, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Los números racionales $\mathbb{Q}$ se pueden ver como un subcuerpo de $\mathbb{R}_W$, son aquellos en los que existen un número natural m y un entero positivo q tales que $a_i = a_{i+q}$, para todo $i \geq m$.
Determinar la expresión racional de los siguientes números de $\mathbb{R}_W$:

$$4,\widehat{9}, \qquad 43,23\widehat{91}, \qquad 271,12349\widehat{324}.$$

13. En $\mathbb{R}^2$ definimos las operaciones

$$\begin{aligned} (a,b) + (c,d) &= (a+c, b+d), \\ (a,b) \cdot (c,d) &= (ac - bd, ad + bc). \end{aligned}$$

a) Demuestra que $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ es un cuerpo.

b) Calcula (x, y) satisfaciendo cada una de las siguiente ecuaciones:

$$\begin{aligned} (x,y)^2 + (-1,0) &= (0,0), \\ (x,y)^2 + (5,0) &= (0,0), \\ (x,y)^2 + (-5,0) &= (0,0), \\ (x,y)^2 + (x,y) + (-1,0) &= (0,0), \\ (x,y)^3 + (-1,0) &= (0,0). \end{aligned}$$