

Números Complejos

1. Hallar la parte real y la parte imaginaria de los siguientes números complejos:

a)  $\frac{1-i}{1+i}$ ,      b)  $\frac{(3-i)(2+i)}{3+i}$ ,      c)  $\frac{(2-i)^2}{(3-i)^2}$ ,      d)  $\sum_{k=1}^{101} i^k$ .

2. Calcular los valores

a)  $|(2+i)(1-i)^4|$ ,      b)  $\left| \frac{1+\sqrt{3}i}{12-5i} \right|$ ,      c)  $\left( \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right)^3$ .

3. Determinar razonadamente para qué números complejos  $z$  y  $w$  de módulo 1 se cumple  $z + w = 2$ .  
¿Cuándo se cumple  $z + w = 1$  con  $z$  y  $w$  de módulo 1?

4. Probar las fórmulas  $\operatorname{Im}(z) = \frac{1}{c^2 + d^2}$  y  $\frac{|z-i|^2}{\operatorname{Im}(z)} + 2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$  para  $z = \frac{ai+b}{ci+d}$  con  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$  tales que  $ad - bc = 1$ .

5. a) Demostrar que si dos enteros positivos  $n$  y  $m$  son suma de dos cuadrados, entonces su producto también es suma de dos cuadrados.

b) Usando que  $13 = 2^2 + 3^2$  y  $29 = 2^2 + 5^2$ , hallar  $a, b \in \mathbb{N}$  tales que  $377 = a^2 + b^2$ .

6. Expresar en forma polar los siguientes números complejos:

a)  $1+i$ ,      b)  $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ ,      c)  $-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$ ,      d)  $-2-2i$ .

7. Calcular

a)  $\exp(\pi i/3)$ ,      b)  $\exp(-\pi i/4)$ ,      c)  $\exp(2019\pi i)$ ,      d)  $\exp(3^{2020}\pi i/2)$ .

8. Calcular las partes real e imaginaria de cada uno de los siguientes números:

a)  $(1+i)^8$ ,      b)  $\left( \cos \frac{\pi}{12} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{12} \right)^{20}$ ,      c)  $\left( \frac{1}{1-i} \right)^{2020} + \left( \frac{1}{1+i} \right)^{2020}$ .

9. Demostrar la siguiente identidad para  $x$  que no sea múltiplo entero de  $2\pi$  y  $N \in \mathbb{N}$ .

$$\sum_{n=-N}^N e^{inx} = \frac{\operatorname{sen} \left( (N + \frac{1}{2})x \right)}{\operatorname{sen}(x/2)}.$$

10. Calcular las raíces cuadradas (complejas) de los números:

a)  $1+i$ ,      b)  $2-i$ ,      c)  $2+i$ ,      d)  $1+2i$ .

11. Calcular las raíces complejas de los siguientes polinomios cuadráticos:

a)  $z^2 + 3iz - 3 + i$ ,      b)  $2z^2 + 4z + 2 + i$ .

12. Calcular los diferentes valores de:

a)  $\sqrt[3]{-8}$ ,      b)  $\sqrt[3]{-i}$ ,      c)  $\sqrt[4]{16i}$ ,      d)  $(1+i)^n + (1-i)^n$ , con  $n \in \mathbb{N}$ .

13. Para  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \neq 1$ , demostrar  $\sum_{k=1}^n e^{2\pi ki/n} = 0$ .

14. Sea  $z = 2e^{2\pi i/5} + 1 + 2e^{-2\pi i/5}$ . Demostrar  $z^2 = 5$ . Deducir de ello una expresión para  $\cos(2\pi/5)$ , que utiliza sólo raíces cuadradas de números naturales.