

Estructuras Algebraicas

1. Sea (A, \star) un magma. Demuestra:

- a) Si (A, \star) es un monoide, el elemento neutro de G es único.
- b) Si (A, \star) es un grupo, para todo $a \in G$ el elemento inverso de a es único.

2. Decide de manera razonada si los siguientes magmas son semigrupos, monoideos o grupos con las operaciones indicadas:

- a) Dado un conjunto no vacío X , el conjunto G de las biyecciones de X con la composición, (G, \circ) .

Calcula el cardinal de G si X es un conjunto finito.

- b) $(\mathbb{Z}, *)$ donde para $n, m \in \mathbb{Z}, n * m = \min(n, m)$.
- c) $(\mathbb{N}, *)$ donde para $n, m \in \mathbb{N}, n * m = n$.
- d) $(A = \{M \in \mathbb{M}_2(\mathbb{Z}) : \det M = -1\}, \cdot)$.
- e) $(B = \{M \in \mathbb{M}_2(\mathbb{Z}) : \det M = 1\}, \cdot)$.
- f) $(C = \{M \in \mathbb{M}_2(\mathbb{Z}) : \det M = +1, -1\}, \cdot)$.
- g) $(D = \{M \in \mathbb{M}_2(\mathbb{Q}) : M \text{ es trigular superior}\}, \cdot)$.
- h) $(G = \{1, -1, i, -i\}, \cdot)$, donde $i^2 = -1$.

3. Demuestra que el conjunto $E = \{\bar{5}, \bar{15}, \bar{25}, \bar{35}\} \subset \mathbb{Z}/40\mathbb{Z}$ es un grupo con el producto módulo 40. Identifica el elemento neutro, y el opuesto de cada elemento.

4. Considera el conjunto $F = \{\bar{1}, \bar{9}, \bar{16}, \bar{22}, \bar{53}, \bar{74}, \bar{79}, \bar{81}, \lambda\} \subset \mathbb{Z}/91\mathbb{Z}$. Se sabe que F es un grupo con el producto módulo 91. ¿Cuál es el valor de λ ?

5. Sea $(G = \{a, b, c\}, *)$ un grupo, donde a es el elemento neutro. Escribe su tabla. Deduce que el grupo es abeliano.

6. Sea $(A, +, \cdot)$ un anillo. Demuestra:

- a) Si 0 denota el elemento neutro de $(A, +)$, entonces $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$, para todo $a \in A$.
- b) Si $-a$ denota el elemento opuesto de a en $(A, +)$, entonces

$$(-a) \cdot b = -(a \cdot b), \quad a \cdot (-b) = -(a \cdot b), \quad (-a) \cdot (-b) = (a \cdot b).$$

7. Sea $n \in \mathbb{N}$. Demuestra que las operaciones suma y producto en $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned} [a] + [b] &= [a + b], \\ [a] \cdot [b] &= [a \cdot b]. \end{aligned}$$

están bien definidas (i.e. no dependen de los representantes elegidos).

- a) Demuestra que $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +, \cdot)$ es un anillo.
- b) Demuestra que si $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +, \cdot)$ es un cuerpo entonces $n = p$ primo. A ese cuerpo se le denota por \mathbb{F}_p .

8. Sea d es un entero libre de cuadrados. En $\mathbb{Z}[\sqrt{d}] := \{a + b\sqrt{d} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ se definen las operaciones:

$$\begin{aligned}(a + b\sqrt{d}) + (a' + b'\sqrt{d}) &= (a + a') + (b + b')\sqrt{d}, \\ (a + b\sqrt{d}) \cdot (a' + b'\sqrt{d}) &= (aa' + bb'd) + (ab' + ba')\sqrt{d}.\end{aligned}$$

Decidir si $(\mathbb{Z}[\sqrt{d}], +, \cdot)$ es un anillo conmutativo con unidad.

9. Sea $(A, +, \cdot)$ un anillo con unidad. Se dice que $a \in A$ es invertible si existe $\hat{a} \in A$ tal que $a \cdot \hat{a} = 1 = \hat{a} \cdot a$. Sea $\mathcal{U}(A)$ el conjunto de elementos invertibles de A . Demuestra que $(\mathcal{U}(A), \cdot)$ es un grupo.

10. Un anillo con unidad $(A, +, \cdot)$ se llama *anillo de división* si $\mathcal{U}(A) = A \setminus \{0\}$. Obsérvese que todo cuerpo es un anillo de división conmutativo. Se definen los cuaterniones (de Hamilton) como

$$\mathbb{H} = \{a + bi + cj + dk : a, b, c, d \in \mathbb{R}\} \text{ tal que } i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1.$$

Demuestra que $(\mathbb{H}, +, \cdot)$ es un anillo de división no conmutativo.