| | | |
|---|---|---|
| **CONJUNTOS Y NÚMEROS**<br>**(21-10-2022)** | **Grado en Matemáticas**<br>**Curso 2022–23** | **Hoja**<br>**nº 5** |

## Cardinalidad

**1.** Sean $A, B$ y $C$ tres conjuntos tales que $A \subset B \subset C$ y $A$ equipotente a $C$ (i.e. $\mathrm{Card}(A) = \mathrm{Card}(C)$). Utilizando los resultados del curso, demostrar que los tres conjuntos son equipotentes (i.e. $\mathrm{Card}(A) = \mathrm{Card}(B) = \mathrm{Card}(C)$).

**2.** Definimos la siguiente relación en $\mathbb{R}$: $x\mathcal{R}y \iff x - y \in \mathbb{Q}$. Demostrar que es una relación de equivalencia. ¿Cuántos elementos tiene cada clase de equivalencia? ¿Es numerable el conjunto cociente?

**3.** Demostrar que el conjunto de los números irracionales, $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, no es numerable.

**4.** Sea $A$ un conjunto infinito. Demostrar que si $a_1, \ldots, a_n \in A$ son elementos de A, el conjunto $A \setminus \{a_1, \ldots, a_n\}$ es equipotente a $A$.

**5.** Demostrar:

**a)** Todo subconjunto de un conjunto finito es finito.

**b)** Todo subconjunto de un conjunto numerable es numerable.

**c)** Un conjunto $A$ es infinito si existe un subconjunto $B \subset A$, $B \neq A$, y un biyección $f : B \longrightarrow A$.

**6.** Determinar el cardinal de cada uno de los siguientes conjuntos:

**a)** $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

**b)** $\mathbb{N} \times \mathbb{Q}$.

**c)** $(-\pi/2, \pi/2)$.

**d)** El intervalo $I = (0, 1)$ y más generalmente el intervalo $(a, b)$.

**e)** $I \times I$.

**f)** $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

**g)** El conjunto $\mathbb{C}$ de los números complejos.

**h)** $\mathcal{P}(\mathbb{N})$.

**i)** $\mathcal{P}(\mathbb{Q})$.

**j)** $\mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$.

**k)** Los intervalos $[a, b]$ y $[a, b)$ en $\mathbb{R}$.

**l)** El conjunto de todas las raíces (racionales o no) de todos los polinomios con coeficientes racionales (a este conjunto se le llama *conjunto de los números algebraicos*).

**m)** El conjunto de todos los subconjuntos de $\mathbb{N}$ que tienen dos elementos.

**n)** El conjunto de los números reales $x \in [0, 1)$ en cuyo desarrollo decimal no aparece el 9.