ÁLGEBRA LINEAL

Grado en Matemáticas
Curso 2021–22

Examen
10-6-2022

Apellidos, Nombre:

Ej 1	Ej 2	Ej 3	Ej 4	Ej 5	FINAL
10	20	15	30	25	100

Razonad debidamente las respuestas

Problema 1. Decide de manera razonada si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

(i) Existe algún elemento ω de $(M_2(\mathbb{R}))^*$ tal que

$$\omega\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}=1,\quad \omega\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}=1,\quad \omega\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}=1,\quad \omega\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}=0.$$

(ii) Sea V un $\mathbb{C}$-espacio vectorial de dimensión 2 y $\{u,v\}$ una base de V. Sea $f : V \longrightarrow V$ una aplicación lineal no nula tal que existen $a,b\in\mathbb{C}$ que cumplen $f(u)=au+bv$ y $f(v)=au+bv$. Entonces f es diagonalizable si y sólo si $a+b\neq 0$.

Problema 2. Sea $\mathbb{R}_3[x]$ el $\mathbb{R}$-espacio vectorial de los polinomios con coeficientes reales de grado menor o igual a 3 junto con el polinomio nulo. Se definen los subespacios vectoriales:

$$W_1=\left\{ax+bx^2+cx^3\in\mathbb{R}_3[x]\colon c=a+b\right\}\qquad \text{y}\qquad W_2=\langle 2+x,-x^2,1+x^3\rangle.$$

(i) Determina una base y unas ecuaciones implícitas para W_1 y W_2.

Se define la aplicación lineal $f\colon\mathbb{R}_3[x]\to\mathbb{R}_3[x]$ dada por

$$f(a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3)=(3a_3+3a_1)x-(2a_1+a_2)x^2+(a_1-a_2+3a_3)x^3.$$

(ii) Calcula una base de $\mathrm{Ker}(f)$.

(iii) Calcula una base de $\mathrm{Im}(f)$.

(iv) Demuestra que existe un endomorfismo g de W_1 tal que $g(p(x))=f(p(x))$, para $p(x)\in W_1$.

Problema 3. Sea la función $\omega\colon M_3(\mathbb{R})\to\mathbb{R}\colon A\mapsto\omega(A)=\displaystyle\sum_{i=1}^{3}(-1)^i a_{ii}$.

(i) Demuestra que $\omega\in(M_3(\mathbb{R}))^*$.

(ii) Determina las coordenadas de ω con respecto a la base dual de la base canónica de $M_3(\mathbb{R})$.

(iii) Determina la matriz de ω con respecto a la base canónica de $M_3(\mathbb{R})$ y la base canónica de $\mathbb{R}$.

Problema 4. En el $\mathbb{R}$-espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ se consideran los subespacios

$$W = \langle (1,2,3), (0,0,1) \rangle,$$

$$U_1 = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{array}{rcl} x+y+z & = & 0 \\ x-2y+z & = & 0 \end{array} \right\},$$

$$U_2 = \langle (1,0,0), (0,1,0) \rangle.$$

(i) Di cuáles de las sumas

$$W + U_1 \quad y \quad W + U_2$$

son directas.

(ii) Para aquellas $W + U_j$ $(j = 1, 2)$ que sean directas halla la descomposición del vector $(1, 1, 1)$ como suma de un vector de W más un vector de U_j.

(iii) Halla una base del cociente $\mathbb{R}^3/W$ y las coordenadas de $[(1, 2, 1)]$ en dicha base.

Problema 5. Sea $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ y definamos las aplicaciones lineales $f : \mathbb{C}^3 \longrightarrow \mathbb{C}^3$ y $g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$:

$$f(x,y,z) = M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad g(x,y,z) = M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

(i) Determina si f es diagonalizable. En cuyo caso determina una base de $\mathbb{C}^3$ formada por autovectores de f.

(ii) Determina si g es diagonalizable. En cuyo caso determina una base de $\mathbb{R}^3$ formada por autovectores de g.

(iii) Determina si f es jordanizable. En cuyo caso determina una base $\mathcal{B}_f$ de $\mathbb{C}^3$ y una matriz de Jordan $J_f \in M_3(\mathbb{C})$ tal que $M_{\mathcal{B}_f}(f) = J_f$.

(iv) Determina si g es jordanizable. En cuyo caso determina una base $\mathcal{B}_g$ de $\mathbb{R}^3$ y una matriz de Jordan $J_g \in M_3(\mathbb{R})$ tal que $M_{\mathcal{B}_g}(g) = J_g$.

(v) En el caso en el que g NO sea jordanizable, determina una forma de Jordan real $J_{\mathbb{R}}$ y una base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ tal que $M_{\mathcal{B}}(g) = J_{\mathbb{R}}$.
