ÁLGEBRA LINEAL

Grado en Matemáticas
Curso 2021–22

Examen
14-1-2022

APELLIDOS, NOMBRE: ____

Ej 1	**Ej 2**	**Ej 3**	**Ej 4**	**Ej 5**	**FINAL**
20	20	20	20	30	110

Razonar debidamente las respuestas

Aprobado: FINAL ≥ 50

Problema 1. Decide de manera razonada si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

(i) Sean las formas lineales $\omega_i : M_2(\mathbb{Q}) \longrightarrow \mathbb{Q}$ definidas por

$$\omega_1 \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a+b+c, \quad \omega_2 \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a-b, \quad \omega_3 \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = b+2c+3d, \quad \omega_4 \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = -a+6b+7c+9d.$$

El conjunto $\{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$ es una base del dual de $M_2(\mathbb{Q})$.

(ii) Sea V un $\mathbb{R}$-espacio vectorial y $f_1, f_2, f_3 : V \longrightarrow V$ aplicaciones lineales tales que $\operatorname{Im}(f_i) = \operatorname{Ker}(f_{i+1})$ para $i = 1, 2$. Se tiene f_1 es sobreyectiva si y sólo si f_3 es inyectiva.

Problema 2. Dados los subespacios vectoriales de $M_2(\mathbb{Q})$ siguientes:

$$W_1 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ -3 & -7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathbb{Q}},$$

$$W_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{Q}) \,\middle|\, 4a + 2b - c - d = 0 \right\}.$$

Se pide:

(i) Una base de W_1 y unas ecuaciones implícitas de W_1.

(ii) Una base de W_2 y unas ecuaciones implícitas de W_2.

(iii) Una base de $W_1 + W_2$ y unas ecuaciones implícitas de $W_1 + W_2$.

(iv) Una base de $W_1 \cap W_2$ y unas ecuaciones implícitas de $W_1 \cap W_2$.

Problema 3. Se define el conjunto de los polinomios con coeficientes reales en dos variables de grado menor o igual a 2 como:

$$V = \left\{ p(x,y) = \sum_{i+j\leq 2} a_{ij}x^i y^j \;:\; a_{i,j} \in \mathbb{R} \right\} = \{a_{00}+a_{10}x+a_{01}y+a_{11}xy+a_{20}x^2+a_{02}y^2 \;:\; a_{ij} \in \mathbb{R},\; i,j = 0,1,2\}.$$

V es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial con la suma de polinomios y producto por escalares usual (No hace falta que lo demuestres).

(i) Calcular una base de V ¿Cuál es la dimensión de V?

(ii) Sea $W = \{p(x,1) \;:\; p(x,y) \in V\}$. Demostrar que W es un subespacio vectorial de V y calcular una base de W.

(iii) Calcular una base del espacio vectorial cociente V/W.

(iv) Determinar las coordenadas de la clase del polinomio $1 + 2x^2 + xy$ en V/W con respecto a la base calculada en el apartado anterior.

Problema 4. Sea $f : \mathbb{R}_3[x] \longrightarrow M_2(\mathbb{R})$ la aplicación lineal definida por:

$$f(p(x)) = \begin{pmatrix} p(0) & p'(1)+p'(0) \\ p'''(1)+p''(-1) & 0 \end{pmatrix},$$

donde $p'(x), p''(x), p'''(x)$ denota la derivada primera, segunda y tercera del polinomio $p(x)$ respectivamente.

(i) Determina la matriz de f con respecto a la base $\mathcal{B} = \{1, x, x^2, x^3\}$ y la base canónica $\mathcal{B}_c$ de $M_2(\mathbb{R})$.

(ii) Determina una base de $\mathrm{Ker}(f)$.

(iii) Determina una base de $\mathrm{Im}(f)$.

Problema 5. Sea $a \in \mathbb{R}$ y $f_a : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ la aplicación lineal que tiene la siguiente matriz con respecto a la base canónica de $\mathbb{R}^4$:

$$M_a = \begin{pmatrix} 1 & -a & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & -2 & -a \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Determina para qué valores de a se tiene que:

(i) f_a es diagonalizable. En cuyo caso determina una matriz diagonal D_a semejante a M_a.

(ii) f_a es jordanizable. En cuyo caso determina una forma canónica de Jordan J_a semejante a M_a.

(iii) f_a NO es jordanizable. En cuyo caso determina una forma de Jordan real $J_a^{\mathbb{R}}$ semejante a M_a.
