ÁLGEBRA LINEAL (3-12-2021)	**Grado en Matemáticas** **Curso 2021–22**	**Hoja n^o 9**

Diagonalización de endomorfismos.

1. Dados los siguientes endomorfismos

$$\begin{array}{ll}
f_1 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, & f_1(x,y) = (y,x), \\
f_2 : \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^2, & f_2(x,y) = (y,-x), \\
f_3 : \mathbb{Q}^2 \longrightarrow \mathbb{Q}^2, & f_3(x,y) = (x-y/2, y-2x), \\
f_4 : \mathbb{F}_2^2 \longrightarrow \mathbb{F}_2^2, & f_4(x,y) = (x, x+y), \\
f_5 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, & f_5(x,y,z) = (3y+9z, x/3+5z, x/9+y/3), \\
f_6 : \mathbb{Q}^3 \longrightarrow \mathbb{Q}^3, & f_6(x,y,z) = (6x-7y-20z, -8z, x-y), \\
f_7 : \mathbb{C}^3 \longrightarrow \mathbb{C}^3, & f_7(x,y,z) = (2x+y+z, 2x+3y+2z, 4x+4y+3z), \\
f_8 : \mathbb{F}_2^3 \longrightarrow \mathbb{F}_2^3, & f_8(x,y,z) = (x+y, x+z, y+z), \\
f_9 : \mathbb{R}_3[x] \longrightarrow \mathbb{R}_3[x], & f_9(p(x)) = p'(x), \\
f_{10} : M_2(\mathbb{F}_2) \longrightarrow M_2(\mathbb{F}_2), & f_{10}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a+b \\ a+b+d & b+c+d \end{pmatrix}, \\
f_{11} : W \longrightarrow W, & f_{11}(x,y,z) = (3x+y, 2z, y-x), \quad \text{donde } W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y+z=0\}.
\end{array}$$

Se pide para cada endomorfismo lo siguiente:

(i) Calcular los autovalores y autovectores.

(ii) Estudiar si es diagonalizable o no sobre el cuerpo base.

(iii) En caso de que sea diagonalizable:

1. Encontrar una base $\mathcal{B}$ formada por autovectores.
2. Escribir la matriz diagonal D del endomorfismo con respecto a $\mathcal{B}$.
3. Dar explícitamente la relación entre la matriz D y la matriz del endomorfismo que hayas utilizado para calcular el polinomio característico.

2. Determinar en cada caso una base de $\mathbb{R}^n$ (o de $\mathbb{C}^n$) en la que las matrices dadas a continuación diagonalicen.

$$A_1 = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ -5 & -2 \end{pmatrix}, A_4 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}, A_5 = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -2 & -3 \end{pmatrix},$$

$$A_6 = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -3 \\ 3 & -3 & -1 \\ -3 & -1 & -3 \end{pmatrix}, A_7 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}, A_8 = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}, A_9 = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -3 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

3. Estudiar según el parámetro $a \in \mathbb{R}$ la diagonalización del endomorfismo de $\mathbb{R}^3$ que, en la base canónica, tiene la matriz

$$\begin{pmatrix} -1 & -3 & -3 \\ 3 & 5 & 3 \\ -3 & -3 & a \end{pmatrix}$$

4. Dadas las matrices de $M_3(\mathbb{R})$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Se pide:

(i) Demostrar que ambas tiene los mismos autovalores.

(ii) ¿Pueden representar el mismo endomorfismo de $\mathbb{R}^3$, quizás en bases distintas?

5. Sean $a, b \in \mathbb{R}$ y definimos la matriz en $M_n(\mathbb{R})$ siguiente

$$A = \begin{pmatrix} a & b & b & \dots & b \\ b & a & b & \dots & b \\ .. & .. & .. & \dots & .. \\ b & b & b & \dots & a \end{pmatrix}$$

.

(i) Calcular los autovectores de A y decidir si es diagonalizable.

(ii) Si $a = b = 1$, calcular el polinomio característico de A. Demostrar que A es diagonalizable y diagonalizar A.

6. Sea $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ un endomorfismo que admite por vectores propios a $(0, 1, -2)$, $(1, 0, 4)$ y $(1, 0, -2)$. Sabiendo que $f(0, 1, 0) = (2, 1, 2)$ hallar los autovalores de f.

7. Dadas las matrices

$$A_1 = \begin{pmatrix} 5/2 & -1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

calcula:

(i) A_k^{10} para $k = 1, 2$.

(ii) $\lim_{n \to \infty} A_k^n$ para $k = 1, 2$.

8. Sea V un K-espacio de dimensión n, $f : V \longrightarrow V$ un endomorfismo de V, A la matriz de f con respecto a alguna base de V y $p_f(x) = det(A - xI_n)$ el polinomio característico de f. Entonces

(i) $p_f(x) = (-1)^n x^n + (-1)^{n-1} traza(A) x^{n-1} + \cdots + det(A)$, donde $traza(A)$ es la suma de los elementos de la diagonal de A.

(ii) Demostrar que si B es otra matriz de f con respecto a otra base de V, entonces $traza(B) = traza(A)$, y por lo tanto podemos definir $traza(f) = traza(A)$ que no depende de la matriz elegida.

9. Sea A una matriz cuadradada con coeficientes en un cuerpo K. Demuestra que A y A^t tienen el mismo polinomio característico y por tanto los mismos autovalores (en K o en "el cierre algebraico de K").

10. Sea V un K-espacio vectorial de dimensión finita y $f : V \longrightarrow V$ un endomorfismo. Decide si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

(i) f es biyectiva si y sólo si 0 no es valor propio de f.

(ii) λ es valor propio de f si y sólo si $-\lambda$ es valor propio de $-f$.

(iii) Si $f^2 = f$, entonces $\{\text{valores propios de } f\} \subset \{0, 1\}$.

(iv) Si $f^2 = f$ y f es biyectiva, entonces 1 es el único valor propio de f.

(v) Si $f^2 = id$, entonces $\{\text{valores propios de } f\} \subset \{1, -1\}$.

(vi) Si todo vector no nulo de V es un vector propio, entonces f es una homotecia.

(vii) Si $V = \mathbb{R}^3$ cumple $f(1, 1, 1) = (0, 0, 0)$ y $2, 3$ son valores propios, entonces f es diagonalizable.

(viii) Si λ y μ son valores propios de f y v y w son vectores propios asociados a ellos respectivamente, entonces $v + w$ es vector propio de f.

(ix) Si f es diagonalizable entonces $V = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$.

11. Sea $A \in M_n(\mathbb{R})$ y definamos los endomorfismos $f : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$ definido por $f(v) = Av^t$ y $g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ definido por $g(v) = Av^t$.

(i) Demostrar que si $v = (z_1, \dots, z_n) = (x_1 + iy_1, \dots, x_n + iy_n) \in \mathbb{C}^n$ es un vector propio con valor propio $\lambda = \lambda_1 + i\lambda_2 \in \mathbb{C}$ de f , entonces $\overline{v} = (\overline{z}_1, \dots, \overline{z}_n) = (x_1 - iy_1, \dots, x_n - iy_n)$ es vector propio de f de autovalor $\overline{\lambda} = \lambda_1 - i\lambda_2$.

(ii) Sean $u_1 = (x_1, \ldots, x_n), u_2 = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$. Demostrar que el subespacio vectorial $V = \langle u_1, u_2 \rangle_{\mathbb{R}} \subset \mathbb{R}^n$ es invariante por el endomorfismo g. Demostrar que la matriz de $g_{|V}$ respecto de la base $\mathcal{B} = \{u_1, u_2\}$ es $\begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ -\lambda_2 & \lambda_1 \end{pmatrix}$, llamada forma canónica real.

(iii) Encontrar la forma canónica real para las siguientes matrices:

$$A_1 = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

12. Llamaremos *matriz estocástica* a una matriz cuadrada $M = (p_{i,j}) \in M_n(\mathbb{R})$ con coeficientes $p_{i,j} \geq 0$ y tal que la suma de los elementos de cada columna es 1, es decir $\sum_{i=1}^{n} p_{i,j} = 1$ para cada $j = 1, \ldots, n$ (observa que esto implica $1 \geq p_{i,j} \geq 0$). Por otra parte, dado un vector $v = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{C}^n$ definimos la *norma infinito de* v como

$$\|v\|_\infty := \text{máx}\{|x_i| : i = 1, \cdots, n\}.$$

Si M es una matriz estocástica, demuestra:

(i) 1 es autovalor de M.

(ii) Para cualquier $v \in \mathbb{C}^n$, se tiene $\|M^t v\|_\infty \leq \|v\|_\infty$. (OJO: aquí la matriz es M^t, que es "estocástica por filas".)

(iii) Cualquier autovalor, real o complejo, λ de M^t satisface $\|\lambda\| \leq 1$.

(iv) Cualquier autovalor, real o complejo, λ de M satisface $\|\lambda\| \leq 1$.

(v) $(1, \ldots, 1)$ es autovector de M^t, ¿para qué autovalor? ¿Es $(1, \ldots, 1)$ necesariamente autovector de M?

13. En un bosque maderero, los árboles están clasificados en dos tamaños. Un censo que se hace cada 5 años reclasifica un 30 % de los árboles de tamaño menor, que pasan a ser de tamaño grande. Entre cada dos censos se corta un 10 % de los árboles de tamaño grande y se repuebla con el mismo número de árboles de tamaño pequeño. ¿Aumenta el número de árboles con el tiempo? Si inicialmente había 1000 árboles de tamaño pequeño y ninguno grande, ¿cuántos árboles de tamaño grande hay a los 20 años? (**Sugerencia:** si x_n(resp. y_n) representa el número de árboles pequeños(resp. grandes) después de n períodos de 5 años, se tiene $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{pmatrix}$ para una cierta matriz A que convendrá diagonalizar).

14. Supongamos que tenemos dos depósitos de igual volumen con agua comunicados por un doble conducto por el que circula el agua como sigue:

NaCl	$\longrightarrow$ $\longleftarrow$	NaCl

Inicialmente, en el primer depósito hay NaCl disuelto al 1 %, y en el segundo hay NaCl disuleto al 2 %. Cada minuto pasa un 5 % del volumen del primer depósito al segundo y viceversa. Decide de manera razonada la concentración de NaCl que habrá en cada uno de los depósitos después de 120 minutos. ¿Qué prevés que suceda a largo plazo?

15. Los *dusky-footed wood rats* son un tipo de roedor común en los bosques de California, cuyo depredador natural es el buho moteado. Denotamos por O_k la población de búhos después de k meses y por R_k la población de roedores después de k-meses. Supongamos que

$$\begin{aligned} O_{k+1} &= \ 0{,}5 O_k + 0{,}4 R_k \\ R_{k+1} &= \ -p O_k + 1{,}1 R_k \end{aligned}$$

donce p es una constante positiva. El sumando $0{,}5O_k$ indica que si no hay roedores, la tasa de supervivencia de los búhos es del 50 % al mes, mientras que el sumando $1{,}1R_k$ nos dice que en ausencia de búhos, los roedores crecerían a un ritmo del 10 % al mes. El término $0{,}4R_k$ indica el crecimiento de los búhos en presencia de los roedores, y el término $-pO_k$ mide la desaparición de roedores debido a la caza por parte de los búhos.

(i) Determina la evolución de las dos poblaciones a largo plazo si $p = 0{,}104$.

(ii) Determina la evolución de las dos poblaciones a largo plazo si $p = 0{,}2$. ¿Crece la población de búhos? ¿Y la de roedores?

(iii) Determina un valor de p para el que el número de individuos de ambas poblaciones se estabilice a largo plazo. ¿Cuál será entonces la proporción entre ambas poblaciones? Se puede probar que este *equilibrio* entre ambas poblaciones es inestable (cualquier cambio menor en alguno de los datos provoca decrecimento o crecimiento de ambas poblaciones a largo plazo).