ÁLGEBRA LINEAL

(4-11-2021)

Grado en Matemáticas
Curso 2021–22

Hoja nº 5

Aplicaciones Lineales.

1. Determinar cuáles de las siguientes aplicaciones son lineales y, en caso afirmativo, calcular su matriz con respecto a las bases canónicas.

(i)	$f:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$,	$f(x,y)=(2x,y-x)$	(ii)	$f:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$,	$f(x,y)=(y,x)$
(iii)	$f:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$,	$f(x,y)=xy$	(iv)	$f:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$,	$f(x,y)=(\sin x,y)$
(v)	$f:\mathbb{Q}^2 \longrightarrow \mathbb{Q}^2$,	$f(x,y)=(xy,x)$	(vi)	$f:\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}^2$,	$f(x)=(2x,0)$
(vii)	$f:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$,	$f(x,y,z)=e^{x+y+z}$	(viii)	$f:\mathbb{F}_2^2 \longrightarrow \mathbb{F}_2$,	$f(x,y)=x+y$
(ix)	$f:\mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}^3$,	$f(x)=(2x,0,x/2)$			

2. (i) Halla $T(1,0)$ si $T:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ es una aplicación lineal para la que sabemos que $T(3,1)=(1,2)$ y $T(-1,0)=(1,1)$.

(ii) Lo mismo sabiendo que $T(4,1)=(1,1)$ y $T(1,1)=(3,-2)$.

3. Decidir en cada caso si existe una aplicación lineal con las propiedades que se indican. En caso afirmativo dar la matriz con respecto a las bases canónicas.

(i) $T:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $\quad T(1,-1,1)=(1,0)$ y $T(1,1,1)=(0,1)$.

(ii) $T:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $\quad T(1,1)=(1,0)$, $T(2,-1)=(0,1)$ y $T(-3,2)=(1,1)$.

4. Sea $T:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ definida por $T(x_1,x_2,x_3)=(x_1+x_3,x_2,x_3-x_1,x_3)$. Determinar la imagen por T del plano $x_1+x_2+x_3=0$.

5. Se consideran las aplicaciones lineales $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ y $g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definidas por:

$$f(x_1,x_2,x_3)=(x_1+x_2+x_3,x_1+x_2,x_3) \qquad \text{y} \qquad g(x_1,x_2,x_3)=(x_1-x_2,x_1+x_3).$$

(i) Calcular $f(W_1)$ y $g(W_1)$, donde $W_1=\langle(1,-1,0),(1,1,1)\rangle$.

(ii) Calcular $f^{-1}(\{(0,0,0)\})$ y $f^{-1}(\{(2,2,1)\})$.

(iii) Calcular $f^{-1}(W)$, siendo $W=\{(x_1,x_2,x_3)\colon x_1=3\lambda,\ x_2=2\lambda,\ x_3=\lambda,\ \lambda\in\mathbb{R}\}$.

6. Caracterizar las aplicaciones lineales $f:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tales que el núcleo y la imagen son subespacios complementarios.

7. Se considera la aplicación lineal $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida mediante $f(1,3,5)=(1,0)$, $f(0,1,1)=(1,0)$ y $f(0,0,1)=(0,0)$. Hallar la matriz de f y las ecuaciones del subespacio transformado mediante f de W, donde

$$W=\left\{(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3 : \begin{array}{rl} x_1+x_2-x_3 & =0 \\ x_2-x_3 & =0 \end{array}\right\}.$$

8. En $\mathbb{R}^3$ se consideran las bases

$$\mathcal{B}_1=\{(1,0,1),(-1,1,1),(1,-1,0)\} \quad \text{y} \quad \mathcal{B}_2=\{(2,1,1),(1,1,1),(1,-1,1)\}.$$

(i) Calcular la matriz de cambio de base de $\mathcal{B}_2$ a $\mathcal{B}_1$.

(ii) Calcular las coordenadas en la base $\mathcal{B}_1$ del vector cuyas coordenadas en la base $\mathcal{B}_2$ son $(3,-2,1)$.

9. Sea $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ el endomorfismo definido por

$$T(x_1, x_2, x_3) = (3x_1 + x_3, -2x_1 + x_2, -x_1 + 2x_2 + 4x_3).$$

(i) Hallar la matriz de T en la base canónica y la matriz de T respecto a la base $\{(1,0,1), (-1,2,1), (2,1,1)\}$.

(ii) Demostrar que T es un isomorfismo y dar una expresión para T^{-1}.

10. Sea $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ una base de $\mathbb{R}^4$. Decide si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

(i) Existe un único endomorfismo f de $\mathbb{R}^4$ tal que

$$f(u_1) = 0, \quad f(u_2) = u_1, \quad f(u_3) = 3u_1 + 2u_2 \quad \text{y} \quad f(u_4) = u_1 + u_2 + u_3.$$

(ii) Existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $f^m(x, y, z, t) = (0, 0, 0, 0)$ para todo $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$.

11. Sea $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $f(x, y, z) = (x, y, 0)$.

(i) Demostrar que $f^2 = f$.

(ii) Calcular la matriz de f con respecto a la base canónica de $\mathbb{R}^3$.

(ii) Calcular $\mathrm{Ker}(f)$ e $\mathrm{Im}(f)$.

12. Sea f el endomorfismo de $\mathbb{R}^3$ que satisface: $\mathrm{Ker}(f) = \langle(1,1,1)\rangle$, $f(1,0,1) = (2,0,2)$ y f restringido a la recta $\{(0, \alpha, \alpha) : \alpha \in \mathbb{R}\}$ es la identidad. Hallar la matriz de f en la base canónica.