ÁLGEBRA LINEAL (1-10-2021)	**Grado en Matemáticas** **Curso 2021–22**	**Hoja nº 3**

Espacios vectoriales.

1. Encontrar todos los vectores $v \in \mathbb{R}^3$ tales que $\{(1,-1,1),(0,2,-2),v\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$.

2. Construye una base de $\mathbb{R}^4$ que contenga a los vectores $(2,-2,3,1)$ y $(-1,4,-6,-2)$.

3. Calcular una base del subespacio $W = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \colon \operatorname{tr}(A) = 0\}$ de $M_n(\mathbb{R})$.

4. Dado el espacio vectorial V. Determinar si es verdadero o falso que el conjunto $\mathcal{B}$ es una base del subespacio vectorial $W \subset V$ en cada uno de los siguientes casos:

i) $V = \mathbb{R}^2$, $W = \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 \colon b = 1\}$ y $\mathcal{B} = \{(2,1)\}$.

ii) $V = \mathbb{C}_3[x]$, $W = \{p(x) \in \mathbb{C}_3[x] \colon (x-1) \text{ divide a } p(x)\}$ y $\mathcal{B} = \{x-1, x^2-1\}$.

iii) $V = M_2(\mathbb{R})$, $W = \{A \in M_2(\mathbb{R}) \colon DA = AD\}$ con $D = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ y $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$.

5. Demostrar que el conjunto $S = \{x+1, x-1, x^2-1, x^2+1\}$ es un sistema de generadores del espacio vectorial real $\mathbb{R}_2[x]$. Encontrar un subconjunto $S' \subseteq S$ que sea base de $\mathbb{R}_2[x]$.

6. Sea $W = \{(a-b) + 2ax + bx^2 + (a+2b)x^3 \, : \, a, b \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}_3[x]$.

i) Demuestra que W es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}_3[x]$.

ii) Calcular una base de W.

7. Considerando la inclusión $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

i) Demuestra que $V = \mathbb{C}^n$ es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial.

ii) Determina la dimensión de V.

8. Considerando la inclusión $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$. Demuestra

i) $V = \mathbb{R}$ es un $\mathbb{Q}$-espacio vectorial.

ii) El subconjunto $A = \{\log(p) \, : \, p \text{ primo}\} \subset V$ es linealmente independiente en V.

iii) La dimensión de V es infinito.

iv) La dimensión de V no es numerable.

9. Sea $\mathcal{B} = \{(1,-1,1),(0,2,-2),(3,1,0)\}$ y $\mathcal{B}' = \{(1,0,1),(0,1,0),(-1,0,1)\}$.

i) Demostrar que $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$ son bases de $\mathbb{R}^3$.

ii) Determinar las coordenadas del vector $u = (1,1,-1)_{\mathcal{B}}$ en la base canónica.

iii) Determinar las coordenadas del vector $u = (1,1,-1)_{\mathcal{B}}$ en la base $\mathcal{B}'$.

10. Encontrar una base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ tal que el vector $u = (1,1,2)$ tenga coordenadas $u = (0,1,-1)_{\mathcal{B}}$.

11. Sea $\mathcal{B} = \{x^3 + 4x, 3x^2 + 4, 6x, 6\} \subset \mathbb{R}_3[x]$.

i) Demuestra que $\mathcal{B}$ es una base de $\mathbb{R}_3[x]$.

ii) Calcula las coordenadas de $p(x) = 2 + 2x - x^2 - x^3$ con respecto a la base $\mathcal{B}$.

12. En el espacio vectorial real $\mathbb{R}_3[x]$ se considera el polinomio $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ con $a \neq 0$.

i) Demostrar que $\mathcal{B}_{p(x)} = \{p(x), p'(x), p''(x), p'''(x)\}$ es una base de $\mathbb{R}_3[x]$.

ii) Si $p(x) = 5x^3 + 3x^2 - 2x + 1$, hallar las coordenadas del vector $q(x) = 15x^3 - 21x^2 - 18x + 37$ con respecto a la base $\mathcal{B}_{p(x)}$.

13. Sea $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \right\} \subset M_2(\mathbb{R})$.

i) Demostrar que $\mathcal{B}$ es una base de $M_2(\mathbb{R})$.

ii) Dar las coordenadas de la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ en la base $\mathcal{B}$ y en la base canónica de $M_2(\mathbb{R})$.

14. Se considera el espacio vectorial real $\mathbb{R}^4$. Sea W un subespacio definido mediante $AX = 0$, con $A \in M_4(\mathbb{R})$. Dar un ejemplo de A, en forma escalonada reducida, para cada dimensión posible de W (no olvidar los casos $\dim W = 0$ y $\dim W = 4$).

15. Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial (de dimensión no necesariamente finita). Sea $v_1, v_2, \ldots$ una secuencia de vectores distintos y no nulos. Demuestra que las siguientes propiedades son equivalentes:

- $S = \{v_1, v_2, \ldots\}$ es un sistema linealmente independiente.
- La secuencia de subespacios $W_k = \langle v_1, v_2, \ldots, v_k \rangle$ es una cadena estrictamente creciente, es decir:

$$W_1 \subset W_2 \subset \cdots \subset W_k \subset \cdots .$$