ÁLGEBRA LINEAL

(21-9-2021)

Grado en Matemáticas
Curso 2021–22

Hoja nº 2

Espacios vectoriales.

1. En $\mathbb{R}^2$ se define la operación suma habitual y el producto $\odot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ por un escalar $\alpha \in \mathbb{R}$ mediante:

(i) $\alpha \odot (x, y) = (\alpha x, 0)$. (ii) $\alpha \odot (x, y) = (\alpha^2 x, \alpha^2 y)$.
(iii) $\alpha \odot (x, y) = (x, y)$. (iv) $\alpha \odot (x, y) = (\alpha x, y)$.

Decidir en cada caso si $(\mathbb{R}^2, +, \odot)$ es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial.

2. En $\mathbb{R}^2$ se define la operación suma habitual y el producto $\odot : \mathbb{C}\times\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ por un escalar $\alpha = a+b\,i \in \mathbb{C}$ mediante: $\alpha \odot (x, y) = (ax - by, bx + ay)$. Decidir si $(\mathbb{R}^2, +, \odot)$ es un $\mathbb{C}$-espacio vectorial.

3. Sea K un cuerpo y $(V, +, \cdot)$ un K-espacio vectorial. Demostrar las siguiente afirmaciones:

(i) El elemento neutro de un espacio vectorial es único. Lo denotaremos por $\mathbf{0}_V$.

(ii) El opuesto de cada elemento en un espacio vectorial es único.

(iii) Sea $0 \in K$. Para todo $u \in V$ se tiene $0 \cdot u = \mathbf{0}_V$.

(iv) Sea $-1 \in K$. Para todo $u \in V$ se tiene $(-1) \cdot u$ es el opuesto de u.

(v) Para todo $k \in K$ se tiene $k \cdot \mathbf{0}_V = \mathbf{0}_V$.

4. Determinar cuáles de los siguientes subconjuntos son subespacios vectoriales (sobre el cuerpo "obvio" en cada caso):

$W_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 5x = \sqrt{2}y\}$, $W_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{C}^3 \,|\, xy + z = x\}$,
$W_3 = \{(x, y) \in \mathbb{Q}^2 \,|\, x = 7n \text{ para algún } n \in \mathbb{Z}\}$, $W_4 = \{(x, y) \in \mathbb{F}_2^2 \,|\, x = y + 1\}$,
$W_5 = \{p(x) \in \mathbb{R}[x] \,|\, \ grado(p(x)) \text{ par}\}$, $W_6 = \{p(x) \in \mathbb{R}[x] \,|\, p(5) = 0\}$,
$W_7 = \{p(x) \in \mathbb{R}[x] \,|\, p(1) \in \mathbb{Z}\}$, $W_8 = \{p(x) \in \mathbb{R}[x] \,|\, \ p(x) = p(-x)\}$,
$W_9 = \{A \in M_{3x4}(\mathbb{R}) \,|\, rango(A) = 3\}$, $W_{10} = \{A \in M_3(\mathbb{R}) \,|\, A^2 = 0\}$,
$W_{11} = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \,|\, A = A^t\}$, $W_{12} = \{A \in M_3(\mathbb{R}) \,|\, A^2 = A\}$,

5. Determinar si los siguientes subconjuntos del espacio $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ (también se denota por $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$) formado por las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ son $\mathbb{R}$-subespacios vectoriales:

$W_1 = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,|\, f \text{ derivable y } f'(2) = 0\}$, $W_2 = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,|\, f \text{ continua y } \int_0^1 f(x)dx = 0\}$,
$W_3 = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,|\, f(\sqrt{2})f(11) = 0\}$, $W_4 = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,|\, f(\sqrt{2}) = -f(11)\}$.

6. Estudia si los siguientes conjuntos son subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^4$.

$$
\begin{aligned}
W_1 &= \{(3x_2, x_2, x_4 + x_2, x_4) \mid x_2, x_4 \in \mathbb{R}\},\\
W_2 &= \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid x_1x_2 = 0\},\\
W_3 &= \{(x_1, x_2, x_1, x_2) \mid x_1 = 1\},\\
W_4 &= \{(x_1, x_1, x_1, x_1) \mid x_1 \in \mathbb{R}\},\\
W_5 &= \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid x_1 = t, x_2 = t, x_3 = 2t, x_4 = 5t, t \in \mathbb{R}\}.
\end{aligned}
$$

7. Estudia si los siguientes conjuntos son subespacios del espacio vectorial $M_2(\mathbb{K})$.

$$V_1 = \{A \in M_2(\mathbb{K})\colon \operatorname{rg}(A) = 1\},$$
$$V_2 = \{A \in M_2(\mathbb{K})\colon AB = BA\}, \text{ donde } B \text{ es la matriz } \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$
$$V_3 = \{A \in M_2(\mathbb{K})\colon a_{11} + a_{12} + a_{21} + a_{22} = 0\}.$$

8. Se considera el espacio vectorial $M_n(\mathbb{K})$. Dada una matrix $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{K})$, se llama *traza* de A a $\operatorname{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$. Estudia si los siguientes subconjuntos de $M_n(\mathbb{K})$ son subespacios.

$$W_1 = \{A \in M_n(\mathbb{K})\colon \operatorname{tr}(A) = 1\}, \qquad W_2 = \{A \in M_n(\mathbb{K})\colon \operatorname{tr}(A) = 0\}.$$

9. Determinar qué subconjuntos son $\mathbb{R}$-subespacios vectoriales o $\mathbb{C}$-subespacios vectoriales:

$$W_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}, \qquad W_2 = \{z \in \mathbb{C} \mid z + \overline{z} = 0\},$$
$$W_3 = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 \mid z + 3iw = 0\}, \qquad W_4 = \{(x, w) \in \mathbb{C}^2 \mid w \in \mathbb{R}\}.$$

10. El sistema $S = \{(1, 0), (0, 1)\}$ genera el $\mathbb{C}$-espacio vectorial $\mathbb{C}^2$. ¿Genera S el $\mathbb{R}$-espacio vectorial $\mathbb{C}^2$?

11. Decide de manera razonada si los siguientes conjuntos son subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^3$ ó no.

$$V_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x + y + z = 0\},$$
$$V_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x = y, 2y = z + 7\},$$
$$V_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 :\, x = y, 2y = z\}.$$

12. Se considera el espacio vectorial real $\mathbb{R}^3$.

i) ¿Son los vectores $(1, 2, 3), (1, 1, 1)$ combinación lineal del sistema $S = \{(1, 0, 1), (0, 2, 2)\}$?

ii) Halla x e y –si es posible– para que el vector $(1, 2, x, y)$ sea combinación lineal de los vectores $(1, 2, 0, 2)$ y $(1, 1, 2, 3)$.

13. Estudia si las siguientes familias de vectores del espacio vectorial real $\mathbb{R}^4$ son linealmente independientes.

$$S_1 = \{(1, 2, 3, 0), (4, 3, 4, -16), (7, 3, 4, 5)\},$$
$$S_2 = \{(1, 0, 0, -1), (2, 1, 1, -2), (0, 1, 1, 0), (1, -1, -1, -1)\}.$$

14. Se considera el espacio vectorial $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ de las funciones en $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$. Estudia si los siguientes sistemas de vectores son linealmente independientes.

$$S_1 = \{\operatorname{sen} x, \cos x\}, \qquad S_2 = \{e^x, e^{x+2}\},$$
$$S_3 = \{2, x + 2, x^2\}, \qquad S_4 = \{0, 1, x + 1\}.$$

15. Sea W el subespacio de $\mathbb{R}^4$ generado por $(1, 2, -5, 3)$ y $(2, -1, 4, 7)$. Se pide

(i) Determinar si el vector $(0, 0, -37, -3)$ pertenece a W.

(ii) Determinar para qué valores de α y β el vector $(\alpha, \beta, -37, -3) \in W$.

16. Determina para qué valor de $\alpha \in \mathbb{R}$ los tres vectores de $\mathbb{R}^4$

$$v_1 = (3, 1, -4, 6), \quad v_2 = (1, 1, 4, 4), \quad v_3 = (1, 0, -4, \alpha)$$

son linealmente dependientes.

17. Determina si los vectores $u_1 = (10, -4, 4, 10)$ y $u_2 = (-8, -2, 9, -15)$ pertenecen al subespacio vectorial $W \subset \mathbb{R}^4$ generado por $v_1 = (2, 1, 1, 4), v_2 = (-4, -3, 0, -7)$ y $v_3 = (0, 0, -1, -1)$.

18. Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo K. Demuestra que dos vectores v_1 y v_2 en $V \setminus \{0_V\}$ son linealmente dependientes si y sólo si existe $k \in K$ tal que $v_2 = kv_1$.

19. Se considera el espacio vectorial real $\mathbb{R}_3[x]$ de los polinomios con coeficientes reales y de grado menor o igual a 3.

i) ¿Es $W_1 = \{p(x) \in \mathbb{R}_3[x] \colon (x-1) \text{ divide a } p(x)\}$ subespacio de $\mathbb{R}_3[x]$?

ii) ¿Es $W_2 = \{p(x) \in \mathbb{R}_3[x] \colon p(2) = 0\}$ subespacio de $\mathbb{R}_3[x]$?

iii) Escribe, si es posible, los polinomios $1, x, x^2, x^3$ como combinación lineal del sistema de vectores formado por $p(x) = 1 + x + x^2 + x^3$ y sus tres primeras derivadas $p'(x), p''(x)$ y $p'''(x)$.

20. Decide si es verdadera o falsa la siguiente afirmación:

- Una variedad lineal asociada a un sistema de n ecuaciones lineales sobre un cuerpo K es un subespacio vectorial de K^n.

En caso de considerla falsa, determina en que condiciones sería verdadera.

21. Sea W la variedad lineal asociada al siguiente sistema de ecuaciones lineales homogéneo:

$$\left.\begin{array}{rcrcrcrcl}
x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & + & 4x_4 & = & 0 \\
-x_1 & + & x_2 & & & + & 9x_4 & = & 0 \\
2x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & - & 5x_4 & = & 0 \\
 & & 3x_2 & + & 3x_3 & + & 13x_4 & = & 0
\end{array}\right\}.$$

Halla un conjunto finito de vectores que genere W.