Forma canónica de Jordan.

1. Consideramos las matrices con coeficientes reales siguientes

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad A_3 = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A_4 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad A_5 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 4 & 2 \\ -2 & -1 & -2 & -1 \\ -4 & -2 & -4 & -2 \end{pmatrix}, \qquad A_6 = \begin{pmatrix} -6 & 3 & 9 & 3 \\ -4 & 2 & 6 & 2 \\ -2 & 1 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A_7 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -4 & 2 \\ 1 & 1 & -4 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}, \qquad A_8 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & -3 \\ 2 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & -3 \end{pmatrix}, \qquad A_9 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & -4 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

(i) Determina la forma canónica de Jordan J_i (sobre el cuerpo $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ en el que el polinomio característico descomponga en factores lineales) de cada una de las matrices A_i y da en cada caso la base de Jordan y el polinomio mínimo.

(ii) Calcula $J_i^{\mathbb{R}}$, la forma canónica real de A_i, una base de $\mathbb{R}^4$ respecto a la cual el endomorfismo de $\mathbb{R}^4$ definido por A_i tenga matriz J_i^{real} y una matriz invertible Q_i tal que $AQ_i = Q_i J_i^{\mathbb{R}}$.

2. Sea f un endomorfismo de $\mathbb{Q}^5$ que verifica lo siguiente:

$$\begin{aligned} f(0,1,0,0,0) &= (0,-1,0,0,0), \\ f(0,0,1,1,0) &= (0,0,1,1,0), \\ f(0,0,0,0,1) &= (1,-1,0,0,2) \end{aligned} \qquad \operatorname{Ker}(f-2\mathrm{id}) = \left\{ (x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) \in \mathbb{Q}^5 \; : \; \begin{array}{rcl} x_1+x_2+x_3 &=& 0 \\ x_3+x_4 &=& 0 \\ x_5 &=& 0. \end{array} \right\}$$

Calcular una forma de Jordan de f y la matriz de f respecto de la base canónica.

3. Sea f un endomorfismo de $\mathbb{R}^3$ tal que:

(i) $(1,1,1)$ y $(0,-1,1)$ son autovectores de f asociados al valor propio 2,

(ii) la suma de la imagen de f y el núcleo de f es directa, y

(iii) la recta $y = z = 0$ está contenida en $\operatorname{Ker}(f^2)$.

Calcular una matriz de Jordan para f y la matriz de f respecto a la base canónica.

4. Las matrices J_i, $i = 1,2,3$, es una forma de Jordan de una cierta matriz A_i, $i = 1,2,3$.

$$J_1 = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}; \quad J_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}; \quad J_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Para $i = 1,2,3$ calcular

(i) el polinomio característico de A_i;

(ii) el polinomio mínimo de A;

(iii) los diagramas de Jordan, las multiplicidades algebraicas, geométricas y de Jordan de cada uno de los autovalores de A_i.

5. Encuentra todas las posibles formas de Jordan (que representen endomorfismos distintos de $\mathbb{R}^n$) para matrices A de tamaño $n \times n$ que satisfagan las condiciones indicadas ($p_A(x)$ es el polinomio característico y $m_A(x)$ el polinomio mínimo).

(i) $p_A(x) = (x-1)^3(x-2)^3(x-3)^3, m_A(x) = (x-1)(x-2)(x-3)$;

(ii) $p_A(x) = m_A(x) = (x-1)^4(x-2)^2$;

(iii) $p_A(x) = (x-1)(x-2)^2(x-3)^3$;

(iv) $n = 6, m_A(x) = (x-1)(x-2)^2(x-3)$;

(v) $n = 3, (A-I)(A-2I)(A-3I) = 0$.

6. Sea $f : V \longrightarrow V$ un endomorfismo de un espacio vectorial V de dimensión n. Diremos que f es nilpotente si existe un entero $k \geq 1$ tal que $f^k = 0$. Llamaremos $G(f) = min\{k \geq 1 \,|\, f^k = 0\}$.

(i) Demuestra que $G(f) \leq n$.

(ii) Demuestra que si f es nilpotente y $G(f) = n = dim(V)$, entonces existe una base de Jordan $\mathcal{B}_J$ de V tal que la matriz de f en esa base es un bloque de Jordan de orden n y autovalor 0, es decir: $M_{\mathcal{B}_J}(f) = J(0, n)$.

(iii) ¿Qué nos dice en general $G(f)$ sobre la forma de Jordan de f?

7. Sea $J = J(\lambda, n)$ un bloque de Jordan de orden n y autovalor λ.

(i) Demostrar que para $k = 1, \ldots, n$ se tiene, para matrices $\mathbf{0}$ de tamaños adecuados,

$$J^k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \lambda^{k-i} \begin{pmatrix} \mathbf{0} & I_{n-i} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}.$$

(Sugerencia: $J = \lambda I_n + N_n$ donde $N_n = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & I_{n-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$ y usar el binomio de Newton viendo que I_n y N_n conmutan).

(ii) Determinar el menor entero k tal que $(J - \lambda I_n)^k = \mathbf{0}$.

8. Definimos la exponencial de una matriz real, suponiendo que las series involucradas convergen, como

$$\exp(A) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n.$$

(i) Comprueba que $exp \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e & e \\ 0 & e \end{pmatrix}$.

(ii) Calcula $exp \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ y $exp \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$.

(iii) Encuentra cambios de base que permitan escribir las aplicaciones lineales dadas por las matrices $A = \begin{pmatrix} 11 & -18 \\ 6 & -10 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ en una de las formas indicadas en (ii); utiliza esto para calcular $exp(A)$ y $exp(B)$.

9. Sea V un espacio vectorial de dimensión n. Se dice que un endomorfismo $s : V \longrightarrow V$ es una simetría si $s^2 = id_V$ y que $\pi : V \longrightarrow V$ es una proyección si $\pi^2 = \pi$. Se pide:

(i) Decidir de manera razonada cómo son los polinomios mínimos de s y de π.

(ii) Usando el apartado anterior, demostrar que s y π son diagonalizables.

(iii) Demostrar que para s (resp. π) existen $W_1, W_2 \subset V$ dos subespacios vectoriales de modo que $W_1 \oplus W_2 = V$ y si $u = v_1 + v_2$ con $v_1 \in W_1$ y $v_2 \in W_2$, entonces $s(u) = v_1 - v_2$ (resp. $\pi(u) = v_1$). Observar que W_1 y W_2 dependen de s (resp. π).

10. Considerar los endomorfismos no nulos de $\mathbb{C}^2$ que verifican $f^2 = 0$. Hallar sus matrices de Jordan.