ÁLGEBRA LINEAL

(21-9-2021)

Grado en Matemáticas
Curso 2021–22

Hoja nº 1

Matrices y sistemas de ecuaciones lineales

1. Se dice que dos matrices $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ *conmutan* si $AB = BA$. Encuentra todas las matrices que conmutan respectivamente con:

$$M_1 = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \qquad M_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \qquad M_3 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \qquad M_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Sean A y B dos matrices con coeficientes en el mismo cuerpo. Decide de manera razonada si las siguientes igualdades son verdaderas o falsas:

$$(AB)^2 = A^2B^2, \qquad (A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2, \qquad (A+B)(A-B) = A^2 - B^2.$$

¿Qué ocurre con las anteriores igualdades si A y B conmutan?

3. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, calcula A^n y B^n para $n \in \mathbb{N}$. ¿Puedes encontrar A^n y B^n para $n \in \mathbb{Z}$?

4. Encuentra, si existen, dos matrices con coeficientes racionales A y B, de tamaño adecuado, que resuelvan el siguiente sistema de ecuaciones matriciales:

$$\begin{cases} 3A - 2B & = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \\ 2A + B & = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}. \end{cases}$$

5. Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Calcula los valores de $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ para los que se cumple la igualdad $A^2 + \alpha A + \beta I_2 = 0$, donde 0 es la matriz nula de orden dos.

6. Sean $A, B \in GL_n(K)$. Encontrar todas las matrices $X \in M_n(K)$ que satisfacen

$$AB^{-1}AXA^{-1}B + 9AB = 0.$$

7. Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{K})$ y el polinomio $p(x) = x^2 - (a+d)x + (ad - bc)$. Demostrar que se tiene $p(A) = 0$. Es decir, $A^2 - (a+d)A + (ad-bc)I_2 = 0 \in M_2(\mathbb{K})$.

8. Sean $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ y $B, C \in M_{n\times r}(\mathbb{K})$. Demuestra que

$$A(B + C) = AB + AC.$$

9. Decide de manera razonada si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

a) La suma de matrices simétricas es una matriz simétrica.

b) El producto de matrices simétricas es una matriz simétrica.

10. Una matriz $A \in M_n(\mathbb{K})$ se llama *idempotente* si $A^2 = A$. Decide de manera razonada si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

a) Si A es idempotente, entonces $I_n - A$ es idempotente.

b) Si A es idempotente, entonces $(I_n - A)A = A(I_n - A) = 0$.

c) Si A es idempotente e invertible entonces A es la matriz identidad.

11. Se considera la siguiente matriz,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Demuestra que $(I_3 - A)^3 = 0$ y utilízalo para calcular A^{-1}.

12. Sean

$$E_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Demuestra que E_i, $i = 1, 2, 3$, es una matriz elemental indicando la transformación t_i elemental que se ha aplicado a I_3.

Efectúa los productos $E_i A, i = 1, 2, 3$, donde $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \\ 5 & 0 & 6 \end{pmatrix}$. Comprueba que realizar la transformación elemental t_i en la matriz A es lo mismo que multiplicar E_i por A.

13. Halla la forma escalonada reducida de cada una de las matrices. ¿Qué rango tienen estas matrices?

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 9 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 6 & 0 & 2/3 \\ 2 & -1 & -2 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 & 3 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & -6 & 3 & -9 & -6 & 3 & -6 \\ 0 & 2 & -1 & 3 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & -4 & 2 & -6 & -4 & 7 & -4 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 4 & 4 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

14. Aplica el método de Gauss-Jordan para discutir y resolver los siguientes sistemas de ecuaciones lineales con coeficientes en $\mathbb{Q}$.

$$a) \left.\begin{aligned} x_2 - 3x_3 &= -5 \\ 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 &= 7 \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 &= 10 \end{aligned}\right\} \quad b) \left.\begin{aligned} 3x_1 - 10x_2 - x_3 &= -15 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 6 \\ x_1 + 14x_2 + 7x_3 &= -1 \end{aligned}\right\} \quad c) \left.\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 2 \\ -x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ -x_1 + 3x_2 + 3x_3 &= 4 \end{aligned}\right\}$$

$$d) \left.\begin{aligned} 2x_1 - 2x_2 + x_3 &= 9 \\ 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 &= 4 \\ 3x_1 + 3x_2 - x_3 &= 9 \end{aligned}\right\} \quad e) \left.\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 &= 7 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 &= 1 \\ 2x_1 - 5x_2 + 2x_3 &= 6 \end{aligned}\right\} \quad f) \left.\begin{aligned} x_1 - 3x_2 + 2x_3 &= 0 \\ -x_1 - 2x_2 + 2x_3 &= 0 \\ 2x_1 \qquad - 2x_3 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

$$g) \left.\begin{aligned} x + y + z + t &= 0 \\ y - z &= 5 \\ x + z + 2t &= 1 \\ x + 2y &= 0 \end{aligned}\right\} \quad h) \left.\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 2 \\ x_1 - x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 &= -2 \\ 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 &= 0 \end{aligned}\right\} \quad i) \left.\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= 0 \\ -x_1 + x_2 + 9x_4 &= 0 \\ -x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= 0 \\ -x_1 + 2x_2 - 5x_3 + 2x_4 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

15. Cada uno de los siguientes apartados consta de dos sistemas con coeficientes en $\mathbb{K}$ y con la misma matriz de coeficientes. Resuélvelos simultáneamente mediante el método de Gauss-Jordan.

$$a)\quad \left.\begin{array}{rcr|r} 2x_1-4x_2 & = & 10 & -8 \\ x_1-3x_2+\ x_4 & = & -4 & -2 \\ x_1-\ x_3+2x_4 & = & 4 & 9 \\ 3x_1-4x_2+3x_3-\ x_4 & = & -11 & -15 \end{array}\right\}$$

$$b)\quad \left.\begin{array}{rcr|r} 2x_1-4x_2 & = & 10 & -8 \\ x_1-3x_2 & = & -4 & -2 \\ x_1-x_3 & = & 4 & 9 \\ 4x_1-7x_2-x_3 & = & 10 & -15 \end{array}\right\}$$

$$c)\quad \left.\begin{array}{rcr|r} 2x_1-4x_2 & = & 10 & -8 \\ x_1-3x_2+\ x_4 & = & -4 & -2 \\ x_1-x_3+2x_4 & = & 4 & 9 \end{array}\right\}$$

16. Resuelve los siguientes sistemas en $\mathbb{C}$ mediante el método de eliminación de Gauss-Jordan.

$$a)\quad \left.\begin{array}{ll} x_1+x_2 & =5 \\ x_1-x_2 & =3+6i \end{array}\right\} \qquad b)\quad \left.\begin{array}{ll} x+y+iz+t & =0 \\ 2x-y+2z-t & =1 \\ x+iy-z+it & =2 \\ x+y+z-t & =0 \end{array}\right\}$$

17. Decide si las siguientes matrices son invertibles, y si lo son, halla su inversa utilizando el método de Gauss-Jordan:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & \sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 9 & 2 & -1 & 2 \\ 10 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

18. Demostrar que la variedad lineal V que forman las soluciones del siguiente sistema de ecuaciones lineales es un plano en $\mathbb{R}^5$:

$$\left.\begin{array}{rcl} -x+4y+3z+4t+2u & = & 3 \\ x+z-2u & = & 1 \\ y+z+t & = & 1 \\ -x+y+t+2u & = & 0 \\ x+5y+6z+5t+2u & = & 0 \end{array}\right\}$$

- ¿Podemos eliminar la segunda ecuación sin cambiar V?¿Y la quinta ecuación?
- ¿Es posible encontrar una descripción paramétrica de las soluciones en la cual las incognitas x, u sean libres?¿Y de las incognitas z, t?

19. Demostrar que una matriz es invertible si y sólo si es elemental.