ÁLGEBRA LINEAL

Grado en Matemáticas
Curso 2021–22

Examen
26-11-2021

	Ejercicio 1	**Ejercicio 2**	**Ejercicio 3**	**FINAL**
Razonar debidamente las respuestas ⋄⋄⋄				
	30 puntos	30 puntos	30 puntos	90

Problema 1. Decide de manera razonada si las siguientes 3 afirmaciones son verdaderas o falsas.

(i) Sean $p_1(x) = 1 + x - x^2$, $p_2(x) = 1 - x^2$, $q_1(x) = 1 - x^2$ y $q_2(x) = 4 + 3x - 2x^2$. Los subespacios vectoriales $W_1 = \langle p_1(x), p_2(x)\rangle_{\mathbb{R}}$ y $W_2 = \langle q_1(x), q_2(x)\rangle_{\mathbb{R}}$ de $\mathbb{R}_2[x]$ satisfacen $\mathbb{R}_2[x] = W_1 + W_2$. Por lo tanto para cada $p(x) \in \mathbb{R}_2[x]$ existen $h_1(x) \in W_1$ y $h_2(x) \in W_2$ tales que $p(x) = h_1(x) + h_2(x)$. Así la aplicación $f : \mathbb{R}_3[x] \longrightarrow \mathbb{R}_3[x]$ definida como $f(p(x)) = 2h_1(x) + 3h_2(x)$ es lineal.

(ii) Las aplicaciones lineales $f_i : \mathbb{R}_1[x] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definidas por

$$f_1(p(x)) = (p(0), 0), \quad f_2(p(x)) = (p(1) - p(0), 0), \quad f_3(p(x)) = (0, p(0)), \quad f_4(p(x)) = (0, p(1) - p(0)),$$

forman una base de $\mathrm{Hom}(\mathbb{R}_1[x], \mathbb{R}^2)$, el espacio vectorial de las aplicaciones lineales de $\mathbb{R}_1[x]$ en $\mathbb{R}^2$.

(iii) Sean V y V' dos K-espacio vectoriales y $f : V \longrightarrow V'$ una aplicación lineal. Si $W \subseteq V'$ es un subespacio vectorial, entonces $f^{-1}(W) \subseteq V$ es un subespacio vectorial.

Problema 2. Sea $V = \mathrm{Hom}(\mathbb{R}_1[x], \mathbb{R}^2)$ el espacio vectorial de las aplicaciones lineales de $\mathbb{R}_1[x]$ en $\mathbb{R}^2$ y $g_1, g_2 : \mathbb{R}_1[x] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ las aplicaciones lineales definidas por

$$g_1(p(x)) = (p(0), p(1)) \qquad \text{y} \qquad g_2(p(x)) = (p(1), p(-1)).$$

(i) Sean $\mathcal{B} = \{1, x\}$ base de $\mathbb{R}_1[x]$ y $\mathcal{B}' = \{(1,0), (0,1)\}$ base de $\mathbb{R}^2$. Calcular $M_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}(g_1)$ y $M_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}(g_2)$.

(ii) Determinar las coordenadas de f_1 y f_2 con respecto a una base de V.

(iii) Calcular una base de $W = \langle g_1, g_2\rangle_{\mathbb{R}} \subseteq V$.

Problema 3. Sea $f : M_2(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{C}_3[x]$ la aplicación lineal definida por

$$f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (a + b) + (d - c)x^2.$$

(i) Calcular una base de $\mathrm{Ker}(f)$ y de $\mathrm{Im}(f)$.

(ii) Comprobar que se cumple el Teorema de la dimensión para f.

(iii) Sea $W = \{p(x) \in \mathbb{C}_3[x] \,|\, p(0) = p(1) = p(-1) = 0\}$. Calcular ecuaciones cartesianas de $W + \mathrm{Im}(f)$ y de $W \cap \mathrm{Im}(f)$ con respecto a la base $\mathcal{B} = \{1, x, x^2, x^3\}$.

(iv) Comprobar que se cumple la fórmula de Grassmann para W e $\mathrm{Im}(f)$.

(vi) ¿Son W e $\mathrm{Im}(f)$ subespacios complementarios?