ÁLGEBRA LINEAL

Grado en Matemáticas
Curso 2020–21

Examen
15-10-2021

	Ejercicio 1	Ejercicio 2	Ejercicio 3	FINAL
Razonar debidamente las respuestas ◇◇◇				
	40 puntos	30 puntos	10 puntos	80

Problema 1. Decide de manera razonada si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

(i) Sea $A \in M_n(\mathbb{Q})$ y $m \in \mathbb{N}$ tal que $A^m = 0 \in M_n(\mathbb{Q})$. Entonces $I_n - A$ es invertible y

$$(I_n - A)^{-1} = I_n + A + A^2 + \cdots + A^{m+2}.$$

(ii) Sea $A \in M_n(\mathbb{R})$ tal que rango$(A) = 1$. Entonces existen $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n, \alpha \in \mathbb{R}$ tales que

$$A = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 & \ldots & y_n \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad A^2 = \alpha A.$$

(iii) El conjunto $\{x^3 - x^2 + x + 1, 2x^3 - x^2 + 3x + 1, 5x^3 - x^2 + 2x + 1, -5x^3 + x^2 + 5x - 1\}$ es una base de $\mathbb{R}_3[x]$.

(iv) El conjunto $W = \{p(x) \in \mathbb{R}_3[x] \,:\, p(1) = -p(-1)\}$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}_3[x]$ y el conjunto $\{x^3 - x^2 + x + 1, 2x^3 - x^2 + 3x + 1, 5x^3 - x^2 + 2x + 1\}$ es una base de W.

Problema 2. Una matriz $A \in M_n(\mathbb{R})$ se dice que es *mágica* si es común la suma de los elementos de cada fila, de cada columna y de cada una de las diagonales. Sea

$$W = \{A \in M_2(\mathbb{R}) \,:\, A \text{ es mágica}\}.$$

(i) Demostrar que W es un subespacio vectorial de $M_2(\mathbb{R})$.

(ii) Calcular la dimensión y una base de W.

(iii) Completar a una base de $M_2(\mathbb{R})$ la base obtenida en el anterior apartado.

Problema 3. Sea $\mathbb{H} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, y > 0\}$. Para $(x, y), (z, w) \in \mathbb{H}$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ definimos

$$(x, y) \oplus (z, w) = (x + z - 2, yw) \qquad \text{y} \qquad \alpha \odot (x, y) = (\alpha x - 2\alpha + 2, y^\alpha).$$

Entonces $(\mathbb{H}, \oplus, \odot)$ es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial (No hace falta que lo demuestres).

(i) Calcula el elemento neutro de la operación $\oplus$. Es decir, $0_{\mathbb{H}}$.

(ii) Dado $(x, y) \in \mathbb{H}$, calcula su elemento opuesto mediante la operación $\oplus$. Es decir, $(x', y') \in \mathbb{H}$ tal que $(x, y) \oplus (x', y') = 0_{\mathbb{H}}$.