

Aplicaciones Lineales.

1. Sean f y g dos aplicaciones lineales. Demostrar:

(i) $\text{Ker}(f) \cap \text{Ker}(g) \subset \text{ker}(f + g)$.

(ii) Si $\text{Im}(f) \cap \text{Im}(g) = \{0\}$, entonces $\text{Ker}(f) \cap \text{Ker}(g) = \text{Ker}(f + g)$.

2. Sea $f : \mathbb{R}_3[x] \rightarrow \mathbb{R}_3[x]$ la aplicación que asocia a cada polinomio su derivada. Demuestra que f es lineal, escribe su matriz respecto a la base canónica de $\mathbb{R}_3[x]$ y describe su núcleo y su imagen.

3. Sea $f : M_{2 \times 3}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}_2[x]$ definido por

$$f \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix} = (a + b) + (c + c')x + (a' + b')x^2$$

(i) Calcular $\text{Ker}(f)$.

(ii) Demostrar que la expresión $\bar{f}([v]) = f(v)$ define un isomorfismo entre el espacio cociente $M_{2 \times 3}(\mathbb{R})/W$ y $\mathbb{R}_2[x]$, donde $W = \text{Ker}(f)$.

(iii) Decidir si esta misma expresión define un homomorfismo cuando W es el subespacio generado por los vectores

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(iv) Probar que el homomorfismo $f : V_1 \rightarrow V_2$ induce un homomorfismo $\bar{f} : V_1/W \rightarrow V_2 \Leftrightarrow W \subset \text{Ker}(f)$

4. Sea $f : M_{2 \times 3}(\mathbb{R}) \rightarrow M_{2 \times 3}(\mathbb{R})$ el endomorfismo definido por

$$f \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a & 2b & 4c \\ 3a' & 3b' & 4c' \end{pmatrix}$$

y W el subespacio del apartado (iii) del ejercicio anterior. Demostrar que f induce un endomorfismo \bar{f} del espacio cociente $M_{2 \times 3}(\mathbb{R})/W$. Calcular su matriz respecto de alguna base.

5. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita y W un subespacio de V .

(i) Demostrar que la aplicación canónica $\pi : V \rightarrow V/W$ definida por $\pi(v) = [v]$ es un epimorfismo. Calcular su núcleo y aplicar el primer teorema de isomorfía.

(ii) Demostrar que existen bases de V y de V/W respecto de las cuales la matriz de π es de la forma $(0_{m \times n} | I_m)$ para ciertos enteros m, n . ¿Qué representan m y n ?