Hensel.

1. Sea $n \in \mathbb{N}$. Demostrar
$$\prod_{\substack{a=1\\(a,n)=1}}^{n-1} a \equiv \pm 1 \pmod{n}.$$

2. Calcular las soluciones de las siguientes ecuaciones:

a) $x^{22} \equiv 101 \pmod{225}$.

b) $x^{27} \equiv 76 \pmod{225}$.

c) $x^{37} \equiv 176 \pmod{225}$.

3. Determinar las soluciones de $x^4 + x^3 + 2x^2 + x \equiv 13 \pmod{343}$.

4. Determinar las soluciones de $x^3 - 2x \equiv 1 \pmod{125}$.

5. Encontrar los últimos dos dígitos de 2^{1000}.

6. Probar que $5\,n^3 + 7\,n^5 \equiv 0 \pmod{12}$, para todo entero n.

7. Encontrar todos los enteros positivos n para los que:

a) $n^{13} \equiv n \pmod{1365}$.

b) $n^{17} \equiv n \pmod{4080}$.

8. Sea $f(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_n]$, p un primo, $n \in \mathbb{N}$ y $C : f(x_1, \ldots, x_n) = 0$. Estudiar si las siguiente afirmaciones son ciertas:

a) $C(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) = \emptyset \Longrightarrow C(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}) = \emptyset$.

b) $C(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) = \emptyset \Longleftarrow C(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}) = \emptyset$.

9. Sea p un primo. El conjunto de los enteros p-ádicos se define como:
$$\mathbb{Z}_p = \{(a_1, a_2 \ldots) : a_{n+1} \equiv a_n \pmod{p^n},\ n = 1, \ldots\}.$$

Demostrar:

a) $\mathbb{Z}_p$ es un anillos con las operaciones suma y producto termino a termino.

b) $\sqrt{2} \in \mathbb{Z}_7$.

c) $\frac{1}{2} \in \mathbb{Z}_p$, si $p \neq 2$.