TEORÍA ALGEBRAICA DE NÚMEROS • **Grado en Matemáticas**

(Parcial 2 : 16-12-2019) **Curso 2019-2020**

Apellidos, Nombre: ______________________________

1.	**2.**	**3.**	**4.**	**5.**	**6.**	**7.**	**Total.**
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
10	10	10	20	10	30	10	100

---

1. Sea G el subgrupo del grupo aditivo $M_2(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z})$ generado por las matrices

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Aplica el Teorema de estructura de grupos abelianos finitamente generados a G para determinar su estructura y sus invariantes.

---

2. Sea K un cuerpo de números e $I, J \subset \mathcal{O}_K$ ideales tales que $I \subseteq J$. Demostrar que $I = J$ si y sólo si $\mathcal{N}_K(I) = \mathcal{N}_K(J)$.

---

3. Sea $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ un polinomio de grado n y $\theta_1, \ldots, \theta_n \in \overline{\mathbb{Q}}$ sus raíces. Se define el discriminante de $f(x)$ como

$$\Delta_f = \prod_{1 \leq i < j, \leq n} (\theta_i - \theta_j)^2.$$

Supongamos que $f(x)$ es mónico e irreducible. Demostrar que para cualquier $i \in \{1, \ldots, n\}$ si $K_i = \mathbb{Q}(\theta_i)$ cumple $\mathcal{O}_{K_i} = \mathbb{Z}[\theta_i]$ entonces $\Delta_{K_i} = \Delta_f$.

---

4. Sea $K = \mathbb{Q}(\zeta_5)$.

a) Encontrar todos los ideales de $\mathcal{O}_K$ con norma 210.

b) Encontrar todos los ideales de $\mathcal{O}_K$ que contienen el elemento $\zeta_5 + 2$.

c) Calcular la factorización en ideales primos de $\mathcal{O}_K$ del ideal $\langle 2 + 2\zeta_5 \rangle$.

---

5. Sea $K = \mathbb{Q}(\sqrt{29})$. Calcula

a) Número de clase de K.

b) Representantes de los elementos de $\mathcal{H}_K$ junto con sus ordenes.

c) La estructura como grupo abeliano de $\mathcal{H}_K$ junto con sus generadores.

---

6. Sea $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-29})$. Calcula

a) Número de clase de K.

b) Representantes de los elementos de $\mathcal{H}_K$ junto con sus ordenes.

c) La estructura como grupo abeliano de $\mathcal{H}_K$ junto con sus generadores.

---

7. Calcular todas las soluciones enteras de la ecuación de Mordell $y^2 + 29 = x^5$.

⋄ ⋄ ⋄ ⋄ ⋄⋄ **Razonar debidamente las respuestas** ⋄ ⋄ ⋄ ⋄ ⋄⋄