TEORÍA ALGEBRAICA DE NÚMEROS (Parcial 1 : 28-10-2019)

Grado en Matemáticas
Curso 2019-2020

Apellidos, Nombre: ______________________________

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	Total.
30	10	20	10	10	10	10	100

---

1. Estudia si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifica tu respuesta.
(Recuerda que si la afirmación es verdadera hay que dar una demostración mientras que si la afirmación es falsa es suficiente con dar un contraejemplo):

a) Existen $x, y \in \mathbb{Z}$ tales que $193x = y^2 + 1$.

b) Sea q un primo impar y $a \in \mathbb{Z}$ tal que $p = q + 4a$ es primo. Entonces $\left(\dfrac{p}{q}\right) = \left(\dfrac{a}{q}\right)$.

c) Sea $n \in \mathbb{Z}$ tal que $p = 24n + 1$ es primo. Entonces $\left(\dfrac{3}{p}\right) = 1$.

d) Sea $n \in \mathbb{Z}$ tal que $p = 24n + 1$ es primo. Entonces la congruencia $x^2 \equiv 6 \pmod{p}$ no tiene solución.

e) La congruencia $x^2 \equiv 2 \pmod{231}$ no tiene solución.

---

2. Determinar si la congruencia $x^2 \equiv 52 \pmod{159}$ tiene solución.

---

3. Calcular las soluciones enteras y racionales de las siguientes cónicas:

$$C_1 : 3x^2 + 9y^2 = 2^{10^{10^{10}}} \qquad \text{y} \qquad C_2 : 8x^2 + 3y^2 = 53.$$

---

4. Determinar las raíces del polinomio $f(x) = x^3 + 3x + 4 \in (\mathbb{Z}/125\mathbb{Z})[x]$.

---

5. Demostrar que si a, b, c y n son entero positivos tal que $n \nmid a$ entonces la congruencia $ax^2 + bx \equiv c \pmod{n}$ tiene como mucho 2 soluciones si n es primo. ¿Qué ocurre si n no es primo?

---

6. Calcular todas las soluciones enteras de la ecuación diofántica $C : y^2 = x^4 - 1$.

---

7. Determinar las condiciones que debe de satisfacer un primo impar p para que 10 sea residuo cuadrático módulo p.

◇◇◇◇◇◇ **Razonar debidamente las respuestas** ◇◇◇◇◇◇