SOLUCIONES

1. (20 puntos) Estudia si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifica tu repuesta.

a) Los puntos $A = (1, 1, 1, 1), B = (1, 1, 1, 2), C = (2, 1, 1, 1)$ y $D = (1, 2, 1, 1)$ son afinmente independientes en el espacio afín $\mathbb{A}^4$.

b) Sean $L_1 = \{x_1 + x_3 = 2, x_2 = 0\}$ y $L_2 = \{x_2 + x_4 = 1, x_3 + x_4 = 1\}$ dos planos en el espacio afín $\mathbb{A}^4(\mathbb{R})$. Se tiene $d(L_1, L_2) = 0$.

c) Dados los planos $L_1 = \{x_1 = 0, x_2 = 0\}$ y $L_2 = \{x_2 = 1, x_3 = 1\}$ en el espacio afín $\mathbb{A}^4(\mathbb{R})$, existe un **único** punto $p \in L_1$ tal que $d(L_1, L_2) = d(p, L_2)$.

d) Una forma normal de la forma cuadrática $4xy - 2xz + 2yz + 4z^2$ es $-X^2 + Y^2 + Z^2$.

SOLUCIÓN:

a) VERDADERA. $\overrightarrow{AB} = (0, 0, 0, 1), \overrightarrow{AC} = (1, 0, 0, 0), \overrightarrow{AB} = (0, 1, 0, 0)$. Estos tres vectores, que son parte de la base canónica de $\mathbb{R}^4$, son linealmente independientes. Por tanto, los puntos dados son afinmente independientes.

b) VERDADERA. La distancia entre dos variedades lineales es cero si y solo si tienen intersección no vacía. El sistema formado por las cuatro ecuaciones de los planos tiene como solución única $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (2, 0, 0, 1)$. Luego la intersección es no vacía y la distancia es 0.

c) FALSA. $L_1 = \mathcal{L}\{\overrightarrow{e_3}, \overrightarrow{e_4}\}$ y $L_2 = (0, 1, 1, 0) + \mathcal{L}\{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_4}\}$. De aquí se deduce que L_1 y L_2 no son paralelas. Como tienen intersección vacía ya que en L_1 se tiene $x_2 = 0$ y en L_2 se tiene $x_2 = 1$, las dos variedades dadas se cruzan. Sean $L = (0, 1, 1, 0) + \mathcal{L}\{\overrightarrow{e_3}, \overrightarrow{e_4}\} + \mathcal{L}\{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_4}\} = (0, 1, 1, 0) + \mathcal{L}\{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_3}, \overrightarrow{e_4}\}$ y $M = (0, 1, 1, 0) + \mathcal{L}\{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_4}\} + (\mathcal{L}\{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_3}, \overrightarrow{e_4}\})^{\perp} = (0, 1, 1, 0) + \mathcal{L}\{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_4}\}$. Ahora puede comprobarse que la intersección de $L_1 \cap M$ es una variedad lineal de dimensión 1 de ecuaciones paramétricas $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, 0, 1, 0) + t(0, 0, 0, 1), t \in \mathbb{R}$. Según lo visto en teoria, para cualquier punto $p \in L_1 \cap M$ se tiene que $q = P_L(p) \in L_2$ (donde P_L denota la proyección ortogonal sobre L) y $d(L_1, L_2) = d(p, q)$. Como la recta $L_1 \cap M$ tiene infinitos puntos, el punto en el que se alcanza la distancia no es único.
Solución alternativa: Se halla, por el procedimiento usual, la distancia entre L_1 y L_2; resulta que $d(L_1, L_2) = 1$. Se puede ahora mirar las ecuaciones de L_1 y L_2 y observar lo siguiente: $p_1 = (0, 0, 1, 0) \in L_1$, $q_1 = (0, 1, 1, 0) \in L_2$, $d(p_1, q_1) = 1$, $p_2 = (0, 0, 1, 1) \in L_1$, $q_2 = (0, 1, 1, 1) \in L_2$, $d(p_2, q_2) = 1$. Luego, hay al menos dos puntos para los que la distancia se alcanza.

d) VERDADERA. La matriz (simétrica) de la forma cuadrática dada es $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$. Su polinomio característico es $P_A(\lambda) = -\lambda^3 + 4\lambda^2 + 6\lambda - 20$. Las soluciones de este polinomio son $\lambda = 2 > 0, \lambda = 1 + \sqrt{11} > 0$ y $\lambda = 1 - \sqrt{11} < 0$. Como A tiene dos autovalores positivos y uno negativo, la forma cuadrática dada es equivalente a $-X^2 + Y^2 + Z^2$.
Alternativamente, se puede completar cuadrados para obtener una forma canónica de la forma cuadrática dada, que debería tener dos términos positivos y uno negativo.

2. (30 puntos) Dados los planos π_1 y π_2 de ecuaciones $\pi_1 : x + y = 1$ y $\pi_2 : x + y = 4$ en $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$, sea $f = s_1 \circ s_2$, donde s_i denota simetría con respecto al plano π_i, $i = 1, 2$.

a) Calcula las expresiones analíticas de s_1 y s_2 con respecto al sistema de referencia canónico de $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$.

b) Calcula la expresión analítica de f con respecto al sistema de referencia canónico de $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$.

c) Clasificar f junto con los elementos geométricos que lo caracterizan.

SOLUCIÓN:

a) La parte vectorial de las simetrías pedidas es una simetría con respecto al plano vectorial $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y = 0\}$. Una base ortonormal de V está formada por los vectores $\overrightarrow{u_1} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(-1, 1, 0)$ y $\overrightarrow{u_2} = (0, 0, 1)$. Un vector perpendicular a V es $\overrightarrow{u_3} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0)$. En la base $\mathcal{B} = \{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3}\}$, la matriz de S_V es $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Haciendo el cambio de base, la matriz de S_V en la base canónica es

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Por tanto, $S_{\pi_1}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. Usando $x^t = (1, 0, 0)$ como punto fijo de S_{π_1} se deduce

$$S_{\pi_1}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Usando $x^t = (4, 0, 0)$ como punto fijo de S_{π_2} se deduce

$$S_{\pi_2}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

b)

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = S_{\pi_1} \circ S_{\pi_2}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right].$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

c) La expresión analítica de f hallada en **b)** nos indica que es una traslación con desplazamiento $d = (-3, -3, 0)^t$.

Nota: la matriz de S_V también puede hallarse con la fórmula $S_V = 2P_V - I = 2(I - P_{V^\perp}) - I = I - 2P_{V^\perp}$, y como $V^\perp = \mathcal{L}\{\overrightarrow{v} = (1, 1, 0)\}$ la matriz de $P_{V^\perp}$ es $\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}(1, 1, 0) = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

3. (30 puntos) Considera las variedades lineales del espacio afín $\mathbb{A}^4(\mathbb{R})$ dadas por

$$L_1 = (-1,0,1,0) + \mathcal{L}((0,2,1,0)) \qquad , \qquad L_2 = (4,1,0,0) + \mathcal{L}(\{(-1,1,1,1),(1,1,0,-1)\}).$$

a) Halla unas ecuaciones implícitas de L_1.

b) Estudia la posición relativa de estas dos variedades lineales.

c) Determina la variedad lineal suma (afín) de L_1 y L_2 indicando sus vectores directores.

SOLUCIÓN:

Hagamos las siguientes notaciones:

$$\begin{array}{ll} A_1 = (-1,0,1,0), & u = (0,2,1,0) \\ A_2 = (4,,1,0,0), & v_1 = (-1,1,1,1),\ v_2 = (1,1,0,-1). \end{array} \implies \begin{array}{l} L_1 = A_1 + \mathcal{L}(\{u\}). \\ L_2 = A_2 + \mathcal{L}(\{v_1,v_2\}). \end{array}$$

a) Sea $P = (x_1,x_2,x_3,x_4) \in L_1$, entonces $\overrightarrow{A_1P} \in \overrightarrow{L_1}$. Es decir, los vectores $P - A_1 = (x_1+1, x_2, x_3-1, x_4)$ y u son linealmente dependientes. Por lo tanto:

$$\operatorname{rango}\begin{pmatrix} 0 & x_1+1 \\ 2 & x_2 \\ 1 & x_3-1 \\ 0 & x_4 \end{pmatrix} = 1 \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{array}{l} \begin{vmatrix} 1 & x_3-1 \\ 0 & x_1+1 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow x_1+1=0 \\[2ex] \begin{vmatrix} 1 & x_3-1 \\ 2 & x_2 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow x_2 - 2x_3 + 2 = 0 \\[2ex] \begin{vmatrix} 1 & x_3-1 \\ 0 & x_4 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow x_4 = 0 \end{array}$$

Es decir, las ecuaciones implícitas de L_1 son:

$$L_1 = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{A}^4(\mathbb{R}) \,:\, x_1 = -1,\ x_2 - 2x_3 = -2,\ x_4 = 0\}.$$

b) Se tiene $u = v_1 + v_2$, por lo tanto $\overrightarrow{L_1} \subset \overrightarrow{L_2}$. Además $A_2 \notin L_1$, ya que no satisface las ecuaciones calculadas en el apartado anterior. Por lo tanto $L_1 \cap L_2 = \emptyset$. Concluimos que L_1 y L_2 son paralelas.

c) La variedad lineal suma de L_1 y L_2 viene dada por

$$L_1 + L_2 = A + \overrightarrow{L_1} + \overrightarrow{L_2} + \mathcal{L}(\{\overrightarrow{B_1B_2}\}),$$

para cualquier punto $A \in L_1 \cup L_2$ y $B_i \in L_i$, $i = 1,2$. Tomemos $A = A_1$, $B_i = A_i$, $i = 1,2$. Hemos visto en el apartado anterior que $L_1 \cap L_2 = \emptyset$ por lo tanto $\overrightarrow{A_1A_2} = (5,1,-1,0) \notin \overrightarrow{L_1} + \overrightarrow{L_2}$. También $\overrightarrow{L_1} + \overrightarrow{L_2} = \overrightarrow{L_2} = \mathcal{L}(\{v_1,v_2\})$ ya que $\overrightarrow{L_1} \subset \overrightarrow{L_2}$. Además v_1 y v_2 no son proporcionales por lo que concluimos que los vectores $v_1, v_2, \overrightarrow{A_1A_2}$ son linealmente independientes:

$$L_1 + L_2 = (-1,0,1,0) + \mathcal{L}(\{(-1,1,1,1),(1,1,0,-1),(5,1,-1,0)\}),$$

donde unos vectores directores de $L_1 + L_2$ son

$$(-1,1,1,1),\ (1,1,0,-1),\ (5,1,-1,0).$$

---

4. (20 puntos) En $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ con la estructura afin euclídea y con un sistema de referencia $\mathcal{R} = \{O; \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}\}$ considera el sistema de referencia $\mathcal{R}' = \{P; \overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3}\}$, donde $P = (1,-1,1)_{\mathcal{R}}$, $\overrightarrow{u_1} = \overrightarrow{e_3}$, $\overrightarrow{u_2} = \overrightarrow{e_1} - \overrightarrow{e_2}$, $\overrightarrow{u_3} = \overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2}$.

a) Halla las coordenadas de $Q = (1,0,2)_{\mathcal{R}}$ con respecto a $\mathcal{R}'$.

b) La ecuación implícita de una variedad L con respecto al sistema de referencia $\mathcal{R}$ es $x + 2y - z = 3$. Halla una ecuación implícita de L con respecto al sistema de referencia $\mathcal{R}'$.

SOLUCIÓN:

Denotamos por $\mathcal{B} = \{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}\}$ y $\mathcal{B}' = \{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3}\}$. Así tenemos

$$\left.\begin{array}{l} u_1 = (0,0,1)_{\mathcal{B}} \\ u_2 = (1,-1,0)_{\mathcal{B}} \\ u_3 = (1,1,0)_{\mathcal{B}} \end{array}\right\} \Longrightarrow C_{\mathcal{B}'\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow C_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} = C_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1/2 & -1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Tenemos $Q = (1,0,2)_{\mathcal{R}}$, es decir $\overrightarrow{OQ} = (1,0,2)_{\mathcal{B}}$. Por otro lado, $P = (1,-1,1)_{\mathcal{R}}$, es decir $\overrightarrow{OP} = (1,-1,1)_{\mathcal{B}}$. Las coordenadas del punto Q con respecto a $\mathcal{R}'$ son las coordenadas del vector $\overrightarrow{PQ}$ con respecto a la base $\mathcal{B}'$. Ahora

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OQ} = -\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} = (0,1,1)_{\mathcal{B}} = C_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = (1,-1/2,1/2)_{\mathcal{B}'}.$$

Concluimos: $Q = (1,-1/2,1/2)_{\mathcal{R}'}$.

b) Sea $X = (x,y,z)_{\mathcal{R}} = (x',y',z')_{\mathcal{R}'}$. Veamos el cambio de coordenadas. Se tiene:

$$(x,y,z)_{\mathcal{B}} = \overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PX} = (1,-1,1)_{\mathcal{B}} + (x',y',z')_{\mathcal{B}'} = (1,-1,1)_{\mathcal{B}} + C_{\mathcal{B}'\mathcal{B}} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = (1+y'+z', -1-y'+z', 1+x')_{\mathcal{B}}.$$

Si $X \in L$ entonces $x + 2y - z - 3 = 0$. Sustituimos los valores de x, y, z en función de x', y', z' en la anterior ecuación y obtenemos:

$$0 = x + 2y - z - 3 = (1 + y' + z') + 2(-1 - y' + z') - (1 + x') - 3 = -5 - x' - y' + 3z'.$$

Concluimos que la ecuación implícita de L con respecto a $\mathcal{R}'$ es $x' + y' - 3z' + 5 = 0$. Es decir:

$$L = \{(x',y',z')_{\mathcal{R}'} \in \mathbb{A}^3(\mathbb{R}) \,:\, x' + y' - 3z' + 5 = 0\}.$$

Observación: En los anteriores apartados hemos calculado:

$$C_{\mathcal{R}'\mathcal{R}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad C_{\mathcal{R}\mathcal{R}'} = C_{\mathcal{R}'\mathcal{R}}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$