Geometría Afín III:
Afinidades.

1. Calcula las ecuaciones de la homotecia $f\colon \mathbb{A}^2(\mathbb{R}) \to \mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ tal que $f(1,1) = (4,2)$ y $f(-1,0) = (-2,-1)$, si existe.

2. Calcula las ecuaciones de la afinidad $T\colon \mathbb{A}^2(\mathbb{R}) \to \mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ que cumple $T(1,1) = (2,3)$, $T(3,2) = (3,8)$ y $T(2,3) = (1,7)$, si existe.

3. Consideramos las rectas en $\mathbb{R}^2$:

$$r_1 : x + 2y - 4 = 0 \qquad \text{y} \qquad r_2 : x = 2y.$$

Calcular la expresión analítica con respecto al sistema referencia canónico de $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ de:

a) la simetría sobre r_1 en la dirección de r_2.

b) la proyección sobre r_1 en la dirección de r_2.

4. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la aplicación definida por

$$f(x,y) = \frac{1}{5}(3x - 4y + 8, -4x - 3y + 16).$$

a) Calcular la matriz de f con respecto al sistema referencia canónico de $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$.

b) Demostrar que f es una simetría y calcular los elementos geométricos que la determinan.

5. Sea $\mathbb{A}$ un espacio afín y $h : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ una homotecia de centro $C \in \mathbb{A}$ y razón λ. Demuestra que si $\lambda \neq 1$ entonces C es el único punto fijo de h. ¿Qué ocurre si $\lambda = 1$?

6. Sea $\mathbb{A}$ un espacio afín de dimensión n y $f : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ una afinidad. Demostrar que si f tiene $n+1$ puntos fijos afínmente independientes, entonces f es la identidad.

7. Sea $f : \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{A}'$ una afinidad. Demostrar:

a) f es inyectiva si y sólo si $\overrightarrow{f}$ es inyectiva.

b) f es sobreyectiva si y sólo si $\overrightarrow{f}$ es sobreyectiva.

c) Si f es biyectiva entonces f^{-1} es afinidad y $\overrightarrow{f^{-1}} = (\overrightarrow{f})^{-1}$.

8. Cambio de coordenadas baricentricas a cartesianas: Sea $\mathbb{A}$ un espacio afín de dimensión n, $\mathcal{R}_b = \{A_0, \ldots, A_n\}$ un sistema de referencia baricéntrico de $\mathbb{A}$ y $\mathcal{R} = \{\mathcal{O}; \mathcal{B}\}$ un sistema de referencia cartesiano de $\mathbb{A}$. Supongamos que las coordenadas de los puntos A_i con respecto a $\mathcal{R}$ son

$$A_i = (\alpha_{i1}, \ldots, \alpha_{in})_{\mathcal{R}}, \qquad i = 0, \ldots, n.$$

Entonces si $X = (\beta_0, \ldots, \beta_n)_{\mathcal{R}_b}$, se tiene

$$X = \left(\sum_{i=0}^{n} \beta_i \alpha_{i1}, \ldots, \sum_{i=0}^{n} \beta_i \alpha_{in} \right)_{\mathcal{R}},$$

es decir, si $X = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)_{\mathcal{R}}$ y denotemos por $C_{\mathcal{R}_b\mathcal{R}} = (\alpha_{ij})$, $i = 0, \ldots, n, j = 1, \ldots, n$ se tiene:

$$(\gamma_1, \ldots, \gamma_n) = (\beta_0, \ldots, \beta_n) C_{\mathcal{R}_b\mathcal{R}}.$$

9. Sea $f : \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{A}'$ una aplicación entre espacios afines.

a) Demuestra que f es una afinidad si y sólo si, para cada familia finita de puntos $A_1, \dots, A_r \in \mathbb{A}$ y cada familia de escalares $\mu_1, \dots, \mu_r$ tales que $\sum_{j=1}^{r} \mu_j = 1$, se cumple:

$$f\Big(\sum_{j=1}^{r} \mu_j A_j\Big) = \sum_{j=1}^{r} \mu_j f(A_j).$$

b) Supongamos que $\mathbb{A}$ y $\mathbb{A}'$ tienen dimensión finita. Sea $\mathcal{R}_b = \{A_0, \dots, A_n\}$ (resp. $\mathcal{R}'_b = \{A'_0, \dots, A'_m\}$) un sistema de referencia baricéntrico de $\mathbb{A}$ (resp. de $\mathbb{A}'$). Si $f(A_i) = (\alpha_{0i}, \dots, \alpha_{0n})_{\mathcal{R}'_b}$. Definimos la matriz de f con respecto a $\mathcal{R}_b$ y $\mathcal{R}'_b$ como:

$$M_{\mathcal{R}_b \mathcal{R}'_b}(f) = (\alpha_{ij}), \quad i = 0, \dots, m; j = 0, \dots, n.$$

Demostrar que la afinidad f queda determinada por la matriz $M_{\mathcal{R}_b \mathcal{R}'_b}(f)$.

10. Considera los puntos de $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ siguientes:

$$\begin{array}{llll} A_0 = (1,1,1), & A_1 = (2,1,1), & A_2 = (1,2,1), & A_3 = (1,1,2). \\ B_0 = (2,3,1), & B_1 = (3,1,2), & B_2 = (1,5,2), & B_3 = (1,4,3). \end{array}$$

a) Demostrar que A_0, A_1, A_2, A_3 son afínmente independientes.

b) Calcula la matriz con respecto al sistema de referencia canónico de $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ de la única afinidad $f : \mathbb{A}^3(\mathbb{R}) \to \mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ que queda definida por las imagenes $f(A_i) = B_i$, $i = 0, 1, 2, 3$.

c) Calcula los puntos fijos de f.

d) Calculas las rectas y planos invariantes por f.

e) Calcula la matriz con respecto al sistema de referencia baricéntrico $\mathcal{R}_b = \{A_0, A_1, A_2, A_3\}$ de la afinidad f.

f) ¿Qué relación hay entre las matrices del apartado (b) y (e)?

11. En $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$, consideramos los puntos

$$A_1 = (1,1,0),\ A_2 = (2,0,2),\ A_3 = (1,2,\alpha),\ A_4 = (3,4,-1),$$

$$B_1 = (2,1,0),\ B_2 = (2,2,1),\ B_3 = (1,1,0),\ B_4 = (3,0,0),$$

con $\alpha \in \mathbb{R}$.

a) Halla los valores de α para los que existe una afinidad $f\colon \mathbb{A}^3(\mathbb{R}) \to \mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ tal que $f(A_i) = B_i$, $i = 1, 2, 3, 4$.

b) Demuestra que $\mathcal{R}_1 = \{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ y $\mathcal{R}_2 = \{B_1, B_2, B_3, B_4\}$ son sistemas de referencia baricéntricos de $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$.

c) Calcula la matriz con respecto $\mathcal{R}_1$ y $\mathcal{R}_2$ de la afinidad f.

12. Sea $f : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ una afinidad y sea $L(f) \subset \mathbb{A}$ el conjunto de puntos fijos por f. Demostrar que si $L(f) \neq \emptyset$ entonces $L(f)$ es un subespacio afín y $\overrightarrow{L(f)} = L(\overrightarrow{f})$, donde $L(\overrightarrow{f}) \subset \overrightarrow{\mathbb{A}}$ denota el subespacio vectorial de los vectores fijos por $\overrightarrow{f}$.