**Geometría Afín II:**
**Sistemas de referencia. Coordenadas. Ecuaciones.**

**1.** Sea $\mathcal{R} = \{O; \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}\}$ un sistema de referencia cartesiano en el espacio afín $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$ respecto del cual el punto $p$ tiene coordenadas $(0,-1)$. Construye otro sistema de referencia en $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$ respecto del cual el punto $p$ tenga como coordenadas $(-1,0)$.

**2.** Sean $P, Q$ y $R$ tres puntos de $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$ tales que $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{PR}$ son linealmente independientes.

**a)** Prueba que los vectores $\overrightarrow{RP}$ y $\overrightarrow{RQ}$ son linealmente independientes.
Considera las referencias cartesianas $\mathcal{R} = \{P; \overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PR}\}$ y $\mathcal{R}' = \{R; \overrightarrow{RP}, \overrightarrow{RQ}\}$.

**b)** Escribe las coordenadas cartesianas de $P, Q$ y $R$ respecto a $\mathcal{R}$.

**c)** Escribe las coordenadas cartesianas de $P, Q$ y $R$ respecto a $\mathcal{R}'$.

**d)** Halla las ecuaciones de cambio de coordenadas entre las dos referencias.

**e)** Decide, de manera razonada, si existe algún punto en $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$ con las mismas coordenadas respecto a los dos sistemas de referencia.

**3.** Determina unas ecuaciones implícitas de las subespacios afines $L_t = p_t + V$ de $\mathbb{A}^4_{\mathbb{R}}$, donde $p_t = (1,-2,3,t)$ y $V = \mathfrak{L}\{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3}\}$ con $\overrightarrow{u_1} = (1,1,0,0)$, $\overrightarrow{u_2} = (0,0,1,1)$ y $\overrightarrow{u_3} = (1,2,-1,0)$ en un sistema de referencia fijado. ¿Para qué valor de $t$ la variedad $L_t$ pasa por el origen?

**4.** Halla unas ecuaciones implícitas de la variedad lineal $L$ de $\mathbb{A}^4_{\mathbb{R}}$ generada por los puntos $p_1 = (1,0,0,1)$, $p_2 = (0,1,0,1)$ y $p_3 = (0,0,1,1)$, cuyas coordenadas están dadas con respecto a un sistema de referencia fijado. ¿Cuál es la dimension de $L$?

**5.** Halla unas ecuaciones implícitas del subespacio afín de $\mathbb{A}^5_{\mathbb{R}}$ generado por los puntos $P_1 = (-1,2,-1,0,4)$, $P_2 = (0,-1,3,5,1)$, $P_3 = (4,-2,0,0,-3)$ y $P_4 = (3,-1,2,5,2)$.

**6.** En $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$ y con respecto de una referencia dada $\mathcal{R}$, se dan los puntos $A = (1,1)$, $B = (-2,0)$, los vectores $\overrightarrow{u_1} = (1,2)$ y $\overrightarrow{u_2} = (-1,1)$ y la subespacio afín $L$ de ecuaciones $x_1 - x_2 = 1$.

**a)** Halla las coordenadas de $B$ respecto al sistema de referencia $\mathcal{R}' = \{A; \overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\}$.

**b)** Halla una ecuación implícita de $L$ con respecto a $\mathcal{R}'$.

**7.** Sea $\mathcal{R}'$ un sistema de referencia en el plano $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$ que se obtiene girando un ángulo $\alpha$ en sentido positivo los vectores de un sistema de referencia canónico $\mathcal{R}$. Si $C$ es la circunferencia cuyos puntos $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ satisfacen $(x_1-1)^2 + x_2^2 = 4$ en el sistema de referencia $\mathcal{R}$, halla las ecuaciones de $C$ en el sistema de referencia $\mathcal{R}'$. ¿Cuáles son las coordenadas del centro de la circunferencia respecto de $\mathcal{R}'$?

**8.** En $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ se consideran las referencias cartesianas:

$$\mathcal{R} = \{O; \overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3}\} \text{ y } \mathcal{R}' = \{O'; \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}\}.$$

Sean $O'_{\mathcal{R}} = (-1,6,2)$, $\overrightarrow{v_1} = \overrightarrow{u_1} + 3\overrightarrow{u_2} + \overrightarrow{u_3}$, $\overrightarrow{v_2} = -\overrightarrow{u_1}$ y $\overrightarrow{v_3} = 2\overrightarrow{u_1} + 5\overrightarrow{u_2} + 7\overrightarrow{u_3}$. Si un plano $\pi$ tiene ecuación $2x - y + 3z = 0$ en $\mathcal{R}$, halla su ecuación respecto a $\mathcal{R}'$.

**9.** En $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$, considera los puntos $P_0, P_1, P_2, Q_0, Q_1$ y $Q_2$, cuyas coordenadas cartesianas en el sistema de referencia cartesiano $\mathcal{R}_C = \{P_0; \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}\}$ son las siguientes:

$$\begin{array}{lll} P_0 = (0,0), & P_1 = (1,7), & P_2 = (1,1) \\ Q_0 = (-1,1), & Q_1 = (1,4), & Q_2 = (3,0) \end{array}$$

**a)** Demuestra que los puntos de $\mathcal{R}' = \{P_0, P_1, P_2\}$ son afinmente independientes. Demuestra que los puntos de $\mathcal{R}'' = \{Q_0, Q_1, Q_2\}$ son afinmente independientes.

**b)** Halla las coordenadas baricéntricas de $P_0, P_1$ y $P_2$ respecto a $\mathcal{R}''$ y las de $Q_0, Q_1$ y $Q_2$ respecto a $\mathcal{R}'$. Considera los sistemas de referencia cartesiana $\mathcal{R}'_C = \{P_0; \overrightarrow{P_0P_1}, \overrightarrow{P_0P_2}\}$ y $\mathcal{R}''_C = \{Q_0; \overrightarrow{Q_0Q_1}, \overrightarrow{Q_0Q_2}\}$.

**c)** Calcula las coordenadas cartesianas de $Q_0, Q_1$ y $Q_2$ respecto a $\mathcal{R}'_C$ y las de $P_0, P_1$ y $P_2$ respecto a $\mathcal{R}''_C$.

**d)** Describe las ecuaciones generales de cambio de coordenadas cartesianas entre $\mathcal{R}'_C$ y $\mathcal{R}''_C$.

**e)** Describe las ecuaciones generales de cambio de coordenadas baricéntricas entre $\mathcal{R}'$ y $\mathcal{R}''$.

**10.** Sean $A = (1,1,1), B = (1,2,3), C = (2,3,1)$ y $D = (3,1,2)$ cuatro puntos de $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ dados por sus coordenadas cartesianas respecto a un sistema de referencia $\mathcal{R}$.

**a)** Demuestra que $\mathcal{R}' = \{A, B, C, D\}$ es un sistema de referencia baricéntrico.

**b)** Calcula las coordenadas cartesianas respecto a $\mathcal{R}$ del baricentro de $A, B, C, D$.

**c)** Si $\mathcal{R} = \{O; \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}\}$, halla las coordenadas baricéntricas de $O$ respecto a $\mathcal{R}'$.

**11.** Demuestra que en $\mathbb{A}^2$ los puntos medios de cualquier cuadrilátero forman un paralelogramo.

**12.** Sean $O$ un punto y sean $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$ dos vectores linealmente independientes. A todo escalar $\lambda$, se le asocian los puntos $A$ y $B$ tales que

$$\overrightarrow{OA} = \lambda \overrightarrow{u}, \quad \overrightarrow{OB} = \lambda \overrightarrow{v}.$$

Determina el baricentro de $A$ y $B$ en función de $\lambda$.

**13.** Halla las ecuaciones baricéntricas del plano que contiene a la recta

$$r \equiv \frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{-1} = z$$

y al punto $P = (-1, -2, 5)$.

**14.** En el espacio afín $(\mathbb{A}, V, \varphi)$ de dimensión $n$, sean $L_1$ y $L_2$ dos subespacios afines. Demuestra que si la dimensión de $L_1$ es $n-1$ y la dimensión de $L_2 \geq 1$, entonces $L_1$ y $L_2$ no se pueden cruzar.

**15.** En el espacio afín $(\mathbb{A}, V, \varphi)$ de dimensión $n$, sean $L_1 = a_1 + V_1$ y $L_2 = a_2 + V_2$ dos subespacios afines. Demuestra que si $V = V_1 \oplus V_2$, entonces $L_1$ y $L_2$ se cortan en un punto.