Espacio vectorial euclídeo II:
Complementos ortogonales. Proyecciones. Gram-Schmidt. Aplicaciones adjuntas.

1. Calcula el complemento ortogonal del subespacio

$$W = \{\vec{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0,\ 2x_1 - x_2 = 0\},$$

cuando se considera en $\mathbb{R}^4$ el producto escalar usual.

2. Calcula el complemento ortogonal de la recta $L = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \colon x_1 = x_2 = x_3\}$ respecto al producto escalar habitual y respecto al producto escalar

$$\phi((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = x_1y_1 + (x_1 + x_2)(y_1 + y_2) + (x_1 + x_2 + x_3)(y_1 + y_2 + y_3)$$

3. Calcula la proyección sobre la recta V_1 dada por las ecuaciones $\{x+y+z = 0, x-y = 0\}$ en la dirección del plano vectorial V_2 generado por los vectores $\vec{w}_1 = (1, 0, 1)$ y $\vec{w}_2 = (1, 1, 0)$). Escribe la proyeccion sobre el plano V_2 en la dirección de la recta V_1.

4. En $\mathbb{R}^4$ con el producto escalar usual, determina las ecuaciones de la proyección ortogonal sobre el subespacio vectorial generado por los vectores $(1, 1, -1, 0)$ y $(0, 0, 2, 1)$.

5. En $\mathbb{R}^3$, encuentra un producto escalar para el que el complemento ortogonal del plano $\{x = 0\}$ sea la recta $\{x = y,\ z = 0\}$.

6. En $\mathbb{R}^3$, se considera el producto escalar con matriz en la base canónica:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

a) Calcula una base ortonormal $\{u_1, u_2, u_3\}$.

b) Calcula la proyección ortogonal sobre el plano $y + z = 0$ del vector con coordenadas $(1, 1, 1)$.

c) Calcula el subespacio ortogonal al vector de coordenadas $(2, 0, 1)$ respecto a la base $\{u_1, u_2, u_3\}$.

7. Consideremos el espacio vectorial $\mathbb{R}_n[x]$. Sean $x_0, x_1, \dots, x_n$ puntos distintos de $\mathbb{R}$ (que fijamos para el resto del ejercicio). Definimos, para $p, q \in \mathbb{R}_n[x]$,

$$\langle p, q\rangle = \sum_{k=0}^{n} p(x_k)q(x_k).$$

a) Demostrar que el producto así definido es un producto escalar.

b) Sea U el subespacio de $\mathbb{R}_n[x]$ formado por los polinomios de grado menor o igual que 1. Dado $p \in \mathbb{R}_n[x]$ demostrar que la proyección ortogonal de p sobre U es

$$P_U(p) = mx + b,$$

con

$$m = \frac{(n+1)\sum x_k y_k - \sum x_k \sum y_k}{(n+1)\sum x_k^2 - (\sum x_k)^2} \qquad y \qquad b = \frac{\sum x_k^2 \sum y_k - \sum x_k \sum x_k y_k}{(n+1)\sum x_k^2 - (\sum x_k)^2},$$

donde por facilitar la notación, ponemos $y_k = p(x_k)$, y suponemos que los límites de todas las sumas son desde $k = 0$ a $k = n$.

8. Sean E un espacio euclídeo y F_1, F_2 dos subespacios vectoriales de E. Demuestra que

$$(F_1 + F_2)^\perp = F_1^\perp \cap F_2^\perp \quad \text{y que} \quad (F_1 \cap F_2)^\perp = F_1^\perp + F_2^\perp.$$

9. Demuestra que la matriz de la proyección ortogonal $P : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ sobre la recta de ecuación $ax+by=0$ es

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & 1-\alpha \end{pmatrix}, \quad \alpha = \frac{b^2}{a^2+b^2}, \quad \beta = \frac{-ab}{a^2+b^2}.$$

donde en $\mathbb{R}^2$ se considera la base canónica con el producto escalar usual.

10. Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ de dimensión n. Se dice que una aplicación lineal $P : V \to V$ es una proyección si $P^2 = P$. Demuestra que una proyección siempre es diagonalizable y $V = \ker(P) \oplus \operatorname{Im}(P)$.

11. Calcula la aplicación adjunta de:

a) $h(x, y, z) = (x + y + z, x + 2y + 2z, x + 2y + 3z)$, con el producto escalar usual de $\mathbb{R}^3$.

b) $h(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, x_1 + 2x_2)$ con el producto escalar de $\mathbb{R}^2$ dado por

$$\phi((x_1, x_2), (y_1, y_2))) = x_1y_1 + (x_1 + x_2)(y_1 + y_2)$$

12. Diagonalizar en una base ortonormal cada una de las siguientes aplicaciones demostrando en primer lugar que son autoadjuntas:

a) $A : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $A(x, y) = (2x + y, 2y + x)$.

b) $A : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $A(x, y, z) = (y + z, x + z, x + y)$.

13. En el espacio vectorial $\mathbb{R}_n[x]$ definimos el producto escalar

$$\phi(p(x), q(x)) = \int_{-1}^{1} p(x)q(x)dx.$$

Demuestra que la aplicación $A : \mathbb{R}_n[x] \longrightarrow \mathbb{R}_n[x]$ dada por $A(p(x)) = xp(x)' - (xp(x))'$ es autoadjunta (donde $p(x)'$ denota la derivada de $p(x)$).

14. Considerando el producto escalar usual en $\mathbb{R}^3$ estudia si la aplicación A es autoadjunta cuando su matriz asociada en la base $\{\vec{u}_1 = (1, 1, 0), \vec{u}_2 = (1, 0, 1), \vec{u}_3 = (1, 2, 0)\}$ es

$$\begin{pmatrix} -4 & -5 & -6 \\ 4 & 2 & 7 \\ 3 & 5 & 4 \end{pmatrix}.$$

15. Sea T una aplicación lineal de un espacio euclídeo en sí mismo. Demostrar que

$$\ker(T^*) = [\operatorname{Im}(T)]^\perp \quad \text{e} \quad \operatorname{Im}(T^*) = [\ker(T)]^\perp.$$

16. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la aplicación lineal cuya matriz asociada en la base estándar de $\mathbb{R}^3$ es:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Encuentra una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ respecto a la que la matriz de f sea diagonal.

17. Sea $f : \mathbb{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ la aplicación que a cada matriz A le asocia su traspuesta, i.e., $f(A) = A^T$. Demuestra que existe una base ortonormal en la que f es diagonalizable. Encuentra esa base.

18. Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ y sean $f, g : V \to V$ dos aplicaciones autoadjuntas. Decide de manera razonada si la composición $f \circ g$ es autoadjunta.