Espacio vectorial euclídeo I:
Formas bilineales. Producto escalar. Espacio Euclideo. Norma. Base ortonormal.

1. Considera la aplicación $\phi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por

$$\phi((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = (2x_1 - 2x_2 + 4x_3)y_1 + (-2x_1 - 2x_3)y_2 + (6x_3 + 4x_1 - 2x_2)y_3.$$

a) Demuestra que ϕ es una forma bilineal simétrica.

b) Decide de manera razonada si ϕ es un producto escalar.

c) Calcula el conjunto de los vectores (x, y, z) que cumplen $\phi\ ((x, y, z), (1, -1, -1)) = 0$.

d) Determina algún vector (x, y, z) (no nulo) que cumpla que $\phi\ ((x, y, z), (x, y, z)) = 0$.

2. Indica razonadamente cuáles de las siguientes aplicaciones $\phi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definen un producto escalar en $\mathbb{R}^2$:

a) $\phi((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1y_1 + 2y_1x_2 - 3x_1y_2 + 2x_2y_2$.

b) $\phi((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1y_1 - x_2y_2$.

c) $\phi((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = 2x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 3x_2y_2$.

Encuentra la matriz en la base canónica de las aplicaciones anteriores que sean formas bilineales .

3. Se dice que una forma bilineal $\varphi : V \times V \to \mathbb{R}$ es antisimétrica si para todo par de vectores $u, v \in V$ se tiene que $\varphi(u, v) = -\varphi(v, u)$.

a) Encuentra una forma bilineal antisimétrica $\varphi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

b) Sea $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ una base de V y sea φ una forma bilineal en V. Da una condición necesaria y suficiente sobre $M_{\mathcal{B}}(\varphi)$ para que φ sea antisimétrica.

c) Demuestra que toda forma bilineal φ en V se puede escribir como la suma de una forma bilineal simétrica y una antisimétrica.

4. Sea $\psi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la forma bilineal dada por:

$$\psi((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}.$$

a) Decide de manera razonada si ψ es un producto escalar.

b) Encuentra una base de $\mathbb{R}^3$ respecto a la que la matriz de ψ es diagonal.

5. Considera la aplicación $\phi : \mathbb{M}_3(\mathbb{R}) \times \mathbb{M}_3(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ dada por $\phi(A, B) = \text{traza } (AB^t)$. Demuestra que ϕ es un producto escalar en $\mathbb{M}_3(\mathbb{R})$. Calcula la matriz de ϕ para alguna base de $\mathbb{M}_3(\mathbb{R})$

6. Halla los cosenos de los ángulos entre los vectores no nulos del subespacio vectorial de ecuaciones $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$ de $\mathbb{R}^n$ y los vectores de la base canónica de $\mathbb{R}^n$, con el producto escalar usual.

7. Para cada $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ considera en $\mathbb{R}^3$ la aplicación bilineal

$$\phi_{\alpha,\beta}\left((x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3)\right) = (x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix} \beta & \alpha & 0 \\ \alpha & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}.$$

Describe el subconjunto de $\mathbb{R}^2$ determinado por los pares (α, β) para los que $\phi_{\alpha,\beta}$ es un producto escalar.

8. Dados $\vec{x}_1 = (1,0,0)$, $\vec{x}_2 = (4,-2,0)$ y $\vec{x}_3 = (1,1,5)$ en $\mathbb{R}^3$ construye los vectores $\vec{y}_1, \vec{y}_2$ e $\vec{y}_3$ según el proceso de ortogonalización de Gram–Schmidt (con el producto escalar usual).

9. Sea $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = x_1y_1 + (x_1+x_2)(y_1+y_2) + (x_1+x_2+x_3)(y_1+y_2+y_3)$ un producto escalar en $\mathbb{R}^3$. Encontrar una base ortogonal del subespacio vectorial $M \subset \mathbb{R}^3$ para:

$$\text{a)} \quad M = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 : x_1 = x_2 = x_3\}; \qquad \text{b)} \quad M = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 : x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0\}.$$

10. Dada la base $\mathcal{B}' = \{u_1 = (-2,-1,1),\ u_2 = (0,-1,0),\ u_3 = (1,-1,0)\}$ de $\mathbb{R}^3$:

a) Demuestra que existe un producto escalar ϕ respecto al cual $\mathcal{B}'$ es una base ortogonal. Decide de manera razonada si ϕ es único con esta propiedad.

b) Demuestra que existe un producto escalar ψ respecto al cual $\mathcal{B}'$ es una base ortonormal. Decide de manera razonada si ψ es único con esta propiedad. Describe la matriz de ψ respecto a la base canónica de $\mathbb{R}^3$.

11. Dado un número natural n, definimos $\mathbb{R}_n[x] = \{p(x) \in \mathbb{R}[x] : \text{grado}(p(x)) \leq n\}$. En $\mathbb{R}_n[x] \times \mathbb{R}_n[x]$, se define la aplicación ϕ:

$$\phi(p(x), q(x)) = \int_{-1}^{1} p(t)q(t)dt.$$

a) Demuestra que ϕ es un producto escalar.

b) Describe el subespacio de polinomios ortogonales al polinomio x.

c) Calcula una base ortogonal de $\mathbb{R}_3[x]$.

12. Sea $(E, \langle , \rangle)$ un espacio euclídeo . Demuestra que:

a) $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 + \|\vec{u}-\vec{v}\|^2 = 2(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2)$, para todo $\vec{u}, \vec{v} \in E$ (ley del paralelogramo).

b) $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}-\vec{v}\|^2 = 4\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$, para todo $\vec{u}, \vec{v} \in E$ (identidad de polarización).

c) $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2 = 2\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$, para todo $\vec{u}, \vec{v} \in E$.

13. Demuestra la siguiente generalización del teorema de Pitágoras:

$$\|\vec{x}_1 + \vec{x}_2 + \cdots + \vec{x}_n\|^2 = \|\vec{x}_1\|^2 + \|\vec{x}_2\|^2 + \cdots + \|\vec{x}_n\|^2,$$

si los vectores $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n \in E$ son ortogonales dos a dos.

14. Si $\vec{x}$ e $\vec{y}$ son dos vectores cualesquiera en un espacio euclídeo E, demuestra que

$$\|\vec{x} - \vec{y}\| \geq \big|\|\vec{x}\| - \|\vec{y}\|\big|.$$

15. Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$. Una norma en V es una aplicación $\|\cdot\|: V \to \mathbb{R}$ tal que:

i) $\|\vec{u}\| \geq 0, \forall \vec{u} \in V$ y $\|\vec{u}\| = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \overrightarrow{0}$.

ii) $\|\lambda \vec{u}\| = |\lambda|\, \|\vec{u}\|, \forall \vec{u} \in V, \lambda \in \mathbb{R}$.

iii) $\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$ (desigualdad triangular).

a) Sea $\|\vec{x}\| = |x_1| + |x_2|$ definida en $\mathbb{R}^2$. Demuestra que $\|\cdot\|$ es una norma en $\mathbb{R}^2$, pero que no proviene de ningún producto escalar porque no satisface la ley del paralelogramo.

($\star$) Supongamos que además la norma cumple la ley del paralelogramo. Demostrar que si definimos la forma bilineal

$$\phi(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2}{4},$$

entonces ϕ es un producto escalar en V que cumple

$$\phi(\vec{u}, \vec{u}) = \|\vec{u}\|^2.$$

Sugerencia: Pincha en el enlace

16. Decide, de forma razonada, si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

a) En el espacio euclídeo E, los vectores $\vec{u} + \vec{v}$ y $\vec{u} - \vec{v}$ son ortogonales si y sólo si $||\vec{u}|| = ||\vec{v}||$.

b) En un espacio euclídeo X se cumple la igualdad

$$\|\, \vec{x} + \vec{y} + \vec{z}\, \|^2 = \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2 + \|\vec{z}\|^2 + 2\left(\langle \vec{x}, \vec{y}\rangle + \langle \vec{y}, \vec{z}\rangle + \langle \vec{z}, \vec{x}\rangle\right),$$

para todos los vectores $\vec{x},\ \vec{y},\ \vec{z} \in X$.

c) En el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$, podemos encontrar dos vectores $\vec{x}, \vec{y}$ y un producto escalar Φ tales que $\Phi(\vec{x}, \vec{x}) = 1$ y $\Phi(\vec{y}, \vec{y}) = \Phi(\vec{x}, \vec{y}) = 2$.