SOLUCIONES

1. Dados tres puntos distintos alineados $A_1, A_2, A_3 \in \mathbb{A}^2(\mathbb{R})$, al número real r tal que $\overrightarrow{A_1A_3} = r\overrightarrow{A_1A_2}$ lo llamaremos *razón simple de* A_1, A_2, A_3**, y denotamos por $(A_1A_2A_3)$.**

a) Demostrar que si $A_1 = (1-\alpha)A_2 + \alpha A_3$, entonces $(A_1A_2A_3) = \dfrac{\alpha - 1}{\alpha}$.

b) Demostrar que si tenemos una afinidad f, entonces $(f(A_1)f(A_2)f(A_3)) = (A_1A_2A_3)$.

SOLUCIÓN:
a) Como $A_1 = (1-\alpha)A_2 + \alpha A_3$, tenemos:

$$0 = \overrightarrow{A_1A_1} = (1-\alpha)\overrightarrow{A_1A_2} + \alpha\overrightarrow{A_1A_3} \quad\Longrightarrow\quad \overrightarrow{A_1A_3} = \left(-\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)\overrightarrow{A_1A_2} = \left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\right)\overrightarrow{A_1A_2}.$$

b) Si f es afín y $A_1 = (1-\alpha)A_2 + \alpha A_3$, entonces $f(A_1) = (1-\alpha)f(A_2) + \alpha f(A_3)$. Por el apartado a) se tiene:

$$(f(A_1)f(A_2)f(A_3)) = \frac{\alpha-1}{\alpha} = (A_1A_2A_3).$$

---

2. Dado el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$. Sea $\varphi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$ la aplicación:

$$\varphi((x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3)) = x_1y_1 + x_1y_2 + x_1y_3 + x_2y_1 + 2x_2y_2 + x_2y_3 + x_3y_1 + x_3y_2 + 2x_3y_3.$$

a) Probar que φ es un producto escalar en $\mathbb{R}^3$ y dar su matriz en la base canónica de $\mathbb{R}^3$.

b) Dar una base ortonormal del espacio euclídeo $(\mathbb{R}^3, \varphi)$.

c) Sea L el plano $2x + 2y + 3z + 5 = 0$ y $\overrightarrow{L}$ el subespacio vectorial asociado a L. Determinar una base de $\overrightarrow{L}^{\perp_\varphi}$, el subespacio vectorial ortogonal respecto de φ de $\overrightarrow{L}$.

SOLUCIÓN: a) La matriz de la forma bilineal φ en la base canónica es

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Puesto que $A^t = A$, φ es simétrica. Por lo tanto, para ver que es un producto escalar basta con ver que es definida positiva y esto lo vemos con el criterio de Sylvester:

$$\Delta_1 = |a_{11}| = |1| = 1 > 0 \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 > 0$$

$$|A| = (4+1+1) - (2+2+1) = 1 > 0$$

Puesto que todos los menores principales son positivos φ es definida positiva.

b) Aplicamos el método de Gram-Schmidt a la base canónica (e_1, e_2, e_3):

Sea $u_1 = e_1$, entonces $\|u_1\|_\varphi^2 = \varphi(u_1, u_1) = \varphi(e_1, e_1) = 1$. Además $\varphi(u_1, e_2) = \varphi(e_1, e_2) = 1$ y $\varphi(u_1, e_3) = \varphi(e_1, e_3) = 1$.

Ahora $u_2 = e_2 - \dfrac{\varphi(u_1, e_2)}{\|u_1\|_\varphi^2} u_1 = e_2 - e_1$, entonces

$$\|u_2\|_\varphi^2 = \varphi(u_2, u_2) = \varphi(e_2 - e_1, e_2 - e_1) = \varphi(e_2, e_2) + \varphi(e_1, e_1) - 2\varphi(e_1, e_2) = 1 + 2 - 2 = 1\,.$$

Además $\varphi(u_2, e_3) = \varphi(e_2 - e_1, e_3) = \varphi(e_2, e_3) - \varphi(e_1, e_3) = 1 - 1 = 0$.

Por último, $u_3 = e_3 - \dfrac{\varphi(u_1, e_3)}{\|u_1\|_\varphi^2} u_1 - \dfrac{\varphi(u_2, e_3)}{\|u_2\|_\varphi^2} u_2 = e_3 - e_1$, entonces

$$\|u_3\|_\varphi^2 = \varphi(u_3, u_3) = \varphi(e_3 - e_1, e_3 - e_1) = \varphi(e_3, e_3) + \varphi(e_1, e_1) - 2\varphi(e_1, e_3) = 1 + 2 - 2 = 1\,.$$

Por tanto (u_1, u_2, u_3) es una base ortonormal para el producto escalar φ.
Donde

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad u_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad u_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

c) Si $u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \overrightarrow{L}$ y $v = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \overrightarrow{L}^{\perp_\varphi}$ tenemos

$$(x, y, z) \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 0 = \varphi(u, v) = (x, y, z) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

Por tanto

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

Resolviendo el sistema obtenemos $\overrightarrow{L}^{\perp_\varphi} : \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ y la base pedida es $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

<u>*Otra forma:*</u> Sea $\{v_1 = (0, 3, -2), v_2 = (3, 0, -2)\}$ una base de $\overrightarrow{L}$, entonces

$$u = (x, y, z) \in \overrightarrow{L}^{\perp_\varphi} \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \varphi(u, v_1) = 0 \\ \varphi(u, v_2) = 0 \end{array} \right\} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 3 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Resolviendo el sistema obtenemos que una base de $\overrightarrow{L}^{\perp_\varphi}$ es $\{(1, 0, 1)\}$.

3. Hallar la distancia entre las variedades lineales de $\mathbb{R}^4$ dadas por

$$W_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} + \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}\right) \qquad \textbf{y} \qquad W_2 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} + \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}\right).$$

<u>SOLUCIÓN</u>:

Determinamos $\overrightarrow{W}_1 + \overrightarrow{W}_2$ usando Gauss:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & x \\ 0 & 1 & 1 & -1 & y \\ 1 & 0 & 1 & 1 & z \\ 0 & 0 & 1 & -1 & t \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|r} 1 & 0 & 1 & 1 & x \\ 0 & 1 & 1 & -1 & y \\ 0 & 0 & 0 & 0 & z-x \\ 0 & 0 & 1 & -1 & t \end{array}\right)$$

que nos dice que $\dim(\overrightarrow{W}_1 + \overrightarrow{W}_2) = 3$ y es el hiperplano $-x + z = 0$.

Por tanto su ortogonal tiene dimesión 1 y una base de él es $\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\0\end{pmatrix}$.

Por otra parte $A_1A_2 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\1\\1\end{pmatrix}$

Por tanto

$$\operatorname{dist}(W_1, W_2) = \|P^{\perp}_{(\overrightarrow{W}_1+\overrightarrow{W}_2)^{\perp}}(A_1A_2)\| = \|\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\0\end{pmatrix}(-1,0,1,0)\begin{pmatrix}0\\1\\1\\1\end{pmatrix}\| = \|\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\0\\\frac{1}{2}\\0\end{pmatrix}\| = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

4. Sea $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ el movimiento que se obtiene como la composición de la simetría respecto del plano $2x+y-2z=1$ seguido de la traslación de vector $\vec{v}=(2,2,2)$. Determinar la expresión análitica de f con respecto al sistema de referencia canónico de $\mathbb{R}^3$.

<u>**SOLUCIÓN:**</u>

Sea g la reflexión respecto al plano $\pi : \ 2x+y-2z=1\,,\ u=\begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix}$ y τ_u la traslación por u, entonces $f=\tau_u\circ g$. Hallamos primero la expresión analítica de g:

Un vector director de π es $w=\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix}$ y la proyección ortogonal correspondiente tiene la matriz:

$$D=\frac{1}{9}\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix}(2,1,-2)=\begin{pmatrix}\frac{4}{9}&\frac{2}{9}&-\frac{4}{9}\\ \frac{2}{9}&\frac{1}{9}&-\frac{2}{9}\\ -\frac{4}{9}&-\frac{2}{9}&\frac{4}{9}\end{pmatrix}$$

Por tanto la matriz de la parte lineal de g es

$$A=I-2D=\begin{pmatrix}\frac{1}{9}&-\frac{4}{9}&\frac{8}{9}\\ -\frac{4}{9}&\frac{7}{9}&\frac{4}{9}\\ \frac{8}{9}&\frac{4}{9}&\frac{1}{9}\end{pmatrix}$$

Un punto de π es $p_0=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$. entonces $(I-A)p_0=2Dp_0=\begin{pmatrix}\frac{4}{9}\\ \frac{2}{9}\\ -\frac{4}{9}\end{pmatrix}$.

La expresión analítica de g es

$$\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{4}{9}\\ \frac{2}{9}\\ -\frac{4}{9}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac{1}{9}&-\frac{4}{9}&\frac{8}{9}\\ -\frac{4}{9}&\frac{7}{9}&\frac{4}{9}\\ \frac{8}{9}&\frac{4}{9}&\frac{1}{9}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$$

y por tanto la de f es

$$\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{22}{9}\\ \frac{20}{9}\\ -\frac{14}{9}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac{1}{9}&-\frac{4}{9}&\frac{8}{9}\\ -\frac{4}{9}&\frac{7}{9}&\frac{4}{9}\\ \frac{8}{9}&\frac{4}{9}&\frac{1}{9}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$$

<u>Otra forma</u> de calcular la expresión analítica de g:

Sea $\{(1,0,1),(0,2,1)\}$ una base del plano $2x+y-2z=0$. Aplicando Gram-Schmidt a esta base obtenemos la base ortonormal: $\{(\frac{\sqrt{2}}{2},0,\frac{\sqrt{2}}{2}),(-\frac{\sqrt{2}}{6},\frac{2\sqrt{2}}{3},\frac{\sqrt{2}}{6})\}$. Ahora añadiendo el vector normal al plano $(\frac{2}{3},\frac{1}{3},\frac{-2}{3})$ obtenemos la base ortonormal $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ con matriz de cambio de base

$$C_{\mathcal{B}\mathcal{B}_c}=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}&-\frac{\sqrt{2}}{6}&\frac{2}{3}\\ 0&\frac{2\sqrt{2}}{3}&\frac{1}{3}\\ \frac{\sqrt{2}}{2}&\frac{\sqrt{2}}{6}&\frac{-2}{3}\end{pmatrix}.$$

Así obtenemos

$$M_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{g})=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\Longrightarrow M_{\mathcal{B}_c}(\overrightarrow{g})=C_{\mathcal{B}\mathcal{B}_c}M_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{g})C^t_{\mathcal{B}\mathcal{B}_c}\Longrightarrow M_{\mathcal{B}_c}(\overrightarrow{g})=\frac{1}{9}\begin{pmatrix}1&-4&8\\-4&7&4\\8&4&1\end{pmatrix}.$$

5. En el sistema de referencia ortonormal usual de $\mathbb{R}^2$, considera la cónica de ecuación

$$36x^2 + 29y^2 - 24xy + 48x + 34y = 139.$$

a) Determina el tipo de cónica y decide si es degenerada o no.

b) Encuentra un sistema de referencia ortonormal respecto al que la ecuación de la cónica sea canónica.

c) Describe, en las coordenadas originales, los elementos geométricos de la cónica:

- **Parábola: Foco, vértice, eje principal y directriz.**
- **Elipse: Focos, centro y ejes principales.**
- **Hipérbola: Focos, centro, ejes principales y asíntotas.**

<u>**SOLUCIÓN 1**</u>**:**

a) Sea $f(x,y) = 36x^2 + 29y^2 - 24xy + 48x + 34y - 139 = (x,y)A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 2b^t\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + c$ el polinomio, en coordenadas canónicas, que define la cónica. Entonces tenemos

$$A = \begin{pmatrix} 36 & -12 \\ -12 & 29 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 24 \\ 17 \end{pmatrix}, \qquad c = -139$$

.

Primero calculamos el determinante de A: $|A| = 900 > 0$, con lo que sabemos que es de tipo elíptico y que tiene centro.

La ecuación del centro es

$$\begin{pmatrix} 36 & -12 \\ -12 & 29 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 24 \\ 17 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

que tiene como solución $x = -1,\ y = -1$. Luego el centro es $p_0 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Entonces $c' = f(p_0) = -180$, como la matriz A es definida positiva sus autovalores λ_1 y λ_2 son positivos y si u_1, u_2 son los correspondientes autovectores la ecuación de la cónica en el referencial $\mathfrak{R}' = (p_0; u_1, u_2)$ es $\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + c' = 0$, luego es no degenerada y es una elipse.

b) Calculamos ahora los autovalores y autovectores. El polinomio característico es $p_A(x) = x^2 - 65x + 900 = (x-20)(x-45)$. Por tanto $\lambda_1 = 20$ y $\lambda_2 = 45$. Los autovectores:

$$\left.\begin{array}{l} A - 20I = \begin{pmatrix} 16 & -12 \\ -12 & 9 \end{pmatrix} \Longrightarrow u_1 = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix} \\ A - 45I = \begin{pmatrix} -9 & -12 \\ -12 & -16 \end{pmatrix} \Longrightarrow u_2 = \begin{pmatrix} -\frac{4}{5} \\ \frac{3}{5} \end{pmatrix} \end{array}\right\} \Longrightarrow \mathfrak{R}' = (\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{4}{5} \\ \frac{3}{5} \end{pmatrix}).$$

El cambio de coordenadas es

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}.$$

La forma canónica es $20x'^2 + 45y'^2 - 180 = 0$ que es lo mismo que

$$\frac{x'^2}{9} + \frac{y'^2}{4} = 1$$

c) El centro se ha encontrado ya, es $p_0 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Los ejes son:

- eje principal: $4x - 3y + 1 = 0$, esto es $p = p_0 + \mathcal{L}(u_1)$.
- eje secundario: $3x + 4y + 7 = 0$, esto es $p = p_0 + \mathcal{L}(u_2)$.

De la ecuación canónica tenemos que los semiejes son $a = 3$ y $b = 2$, luego la distancia del centro a los focos es $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{5}$.
Los focos son: $F_1 = p_0 + cu_1 = \begin{pmatrix} \frac{-5+3\sqrt{5}}{5} \\ \frac{-5+4\sqrt{5}}{5} \end{pmatrix}$ y $F_2 = p_0 - cu_1 = \begin{pmatrix} -\frac{5+3\sqrt{5}}{5} \\ -\frac{5+4\sqrt{5}}{5} \end{pmatrix}$.

<u>SOLUCIÓN 2</u>:
a) Sea $f(x, y) = 36x^2 + 29y^2 - 24xy + 48x + 34y - 139$ el polinomio, en coordenadas canónicas, que define la cónica. Entonces tenemos

$$A = \begin{pmatrix} 36 & -12 \\ -12 & 29 \end{pmatrix}, \quad \overline{A} = \begin{pmatrix} 36 & -12 & 24 \\ -12 & 29 & 17 \\ 24 & 17 & -139 \end{pmatrix} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \delta = |A| = 900, \\ \Delta = |\overline{A}| = -16200. \end{array} \right.$$

Como $\delta > 0$ tenemos que la cónica es de tipo elíptico, en particular que los autovalores de A, λ_1, λ_2, son no nulos y del mismo signo. Ahora, como $\Delta < 0$ obtenemos que la cónica es una elipse o el vacío. Será una elipse si $\lambda_1, \lambda_2 > 0$. Para ello calculamos el polinomio característico de A: $p_A(x) = x^2 - 65x + 900 = (x-20)(x-45)$. Por tanto $\lambda_1 = 20$ y $\lambda_2 = 45$. Así que obtenemos que la cónica es una elipse (y por lo tanto no degenerada) tiene la siguiente forma canónica

$$\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 - \frac{\Delta}{\delta} = 0 \Longrightarrow 20X^2 + 45Y^2 = 180 \Longrightarrow \frac{X^2}{9} + \frac{Y^2}{4} = 1.$$

De la ecuación canónica tenemos que los semiejes son $a = 3$ y $b = 2$, luego la distancia del centro a los focos es $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{5}$.
b) y c) Calculamos los autovectores asociados a los autovalores:

$$\left. \begin{array}{l} \lambda_1 = 20 \Longrightarrow A - 20I = \begin{pmatrix} 16 & -12 \\ -12 & 9 \end{pmatrix} \Longrightarrow u_1 = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \\ \\ \lambda_2 = 45 \Longrightarrow A - 45I = \begin{pmatrix} -9 & -12 \\ -12 & -16 \end{pmatrix} \Longrightarrow u_2 = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix} \end{array} \right\} \Longrightarrow P = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}.$$

Sustituimos (x, y) en la ecuación de la cónica y obtenemos:

$$20x_1^2 + 56x_1 + 45y_1^2 - 18y_1 - 139 = 0.$$

Completando cuadrados obtenemos:

$$20\left(x_1 + \frac{56}{2 \cdot 20}\right)^2 + 45\left(y_1 - \frac{18}{2 \cdot 45}\right)^2 - 180 = 0 \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_2 = x_1 + \frac{7}{5} \\ y_2 = y_1 - \frac{1}{5} \end{array} \right\} \Longrightarrow 20x_2^2 + 45y_2^2 = 180.$$

Por lo tanto el cambio de coordenadas es de la forma: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} x_2 - \frac{7}{5} \\ y_2 + \frac{1}{5} \end{pmatrix}$.

Ahora calculemos los elementos geométricos:

	(x_2, y_2)	(x, y)
Centro	$(0, 0)$	$(-1, -1)$
Focos	$(\pm\sqrt{5}, 0)$	$(\frac{-5\pm3\sqrt{5}}{5}, \frac{-5\pm4\sqrt{5}}{5})$
Eje principal	$y_2 = 0$	$4x - 3y + 1 = 0$
Eje secundario	$x_2 = 0$	$3x + 4y + 7 = 0$

El sistema de referencia será $\mathfrak{R}_2 = \{\text{centro}; \{u_1, u_2\}\} = \{(-1, -1); \{\frac{1}{5}(3, 4), \frac{1}{5}(-4, 3)\}\}$.

6. Determina el tipo de las cuádricas que aparecen en la familia uniparamétrica

$$x^2+3y^2+z^2+3xy+xz+2\alpha x-2y-2z+1=0$$

explicando lo que ocurre para todos los valores reales del parámetro α.

SOLUCIÓN 1:

Tenemos la cuádrica $f(x,y,z)=0$, donde f está determinada por

$$A=\begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & 3 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad b=\begin{pmatrix} \alpha \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad c=1$$

Vemos si es definida:

$$\Delta_1=1\,,\ \Delta_2=\frac{3}{4}\,,\ \Delta_3=|A|=0\,.$$

Por tanto es semidefinida positiva y tiene dos autovalores positivos y el autovalor cero.

Hallamos el núcleo de A: las soluciones de la ecuación $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ son $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=t\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Entonces $b_0=P^{\perp}_{\mathrm{Ker}A}b=-\frac{\alpha+1}{3}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Por tanto si $b_0\neq 0$ ($\alpha\neq -1$) la cuádrica es no degenerada y es un paraboloide elíptico.

Si $b_0=0$ ($\alpha=-1$) la cuádrica es degenerada.

La ecuación del centro es $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, que tiene como solución

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ 0 \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}+t\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Entonces f es constante en el cento y su valor es $f(\frac{2}{3},0,\frac{2}{3})=-\frac{1}{3}$ y la forma canónica es $\lambda_2 y'^2+\lambda_3 z'^2-\frac{1}{3}=0$ que tiene soluciones y es un cilindro elíptico.

SOLUCIÓN 2: Sea $f(x,y,z)=x^2+3y^2+z^2+3xy+xz+2\alpha x-2y-2z+1$ el polinomio, en coordenadas canónicas, que define la cuádrica. Entonces tenemos

$$A=\begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & 3 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \overline{A}=\begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \alpha \\ \frac{3}{2} & 3 & 0 & -1 \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 & -1 \\ \alpha & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} \delta=|A|=0, \\ \Delta=|\overline{A}|=-3(\alpha+1)^2. \end{cases}$$

En primer lugar, para determinar el tipo de cúadrica dependerá de si $\Delta=0$ o $\Delta\neq 0$. O lo que es lo mismo $\alpha=-1$ o $\alpha=1$. Así obtenemos

- $\alpha\neq -1$: Paraboloide elíptico o hiperbólico.
- $\alpha=-1$: Cilindro, recta, par de planos o vacio.

Supongamos $\alpha\neq -1$. El polinomio característico de A es $p_A(x)=-x^3+5x^2-\frac{9}{2}x=-x(x-\lambda_1)(x-\lambda_2)$, donde $\lambda_1=\frac{1}{2}(5+\sqrt{7})$ y $\lambda_2=\frac{1}{2}(5-\sqrt{7})$. Así vemos que la signatura de A es $(2,0)$ (o bien calculando $s_2=\frac{9}{2}$) y por lo tanto sabemos que la cuádrica es un paraboloide elíptico.

Ahora supongamos $\alpha = -1$. Entonces tenemos que la cúadrica tendrá una forma canónica de la forma

$$\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 = C,$$

donde λ_1 y λ_2 son los autovalores (calculados anteriormente) de A y $C \in \mathbb{R}$. Como $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ obtenemos que la cuádrica será un cilindro elíptico ($C > 0$), una recta ($C = 0$) o vacío ($C < 0$).
Calculemos el valor de C, para ello basta con calcular un centro de la cuádrica. Es decir, (x_0, y_0, z_0) tal que $\nabla f(x_0, y_0, z_0) = (0, 0, 0)$, entonces $C = -f(x_0, y_0, z_0)$. Se tiene:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial x} = 2\alpha + 2x + 3y + z = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial y} = -2 + 3x + 6y = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial z} = -2 + x + 2z = 0, \end{array} \right\} \Longrightarrow (x, y, z) = \left(t, \frac{1}{3} - \frac{t}{2}, 1 - \frac{t}{2} \right), \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Tomamos $t = 0$, entonces $f\left(0, \frac{1}{3}, 1\right) = -\frac{1}{3}$ y por lo tanto tenemos que $C = \frac{1}{3}$. Así concluimos que la cuádrica es un cilindro elíptico.

<u>Conclusión:</u>

- $\alpha \neq -1$: Paraboloide elíptico.
- $\alpha = -1$: Cilindro elíptico.

De hecho, aunque no se pida en el enunciado, es fácil calcular que la forma canónica es:

- $\alpha \neq -1$: Paraboloide elíptico
$$\frac{1}{2}(5 + \sqrt{7})X^2 + \frac{1}{2}(5 - \sqrt{7})Y^2 = \frac{2}{3}\sqrt{6}(1 + \alpha)Z.$$
- $\alpha = -1$: Cilindro elíptico
$$\frac{1}{2}(5 + \sqrt{7})X^2 + \frac{1}{2}(5 - \sqrt{7})Y^2 = \frac{1}{3}.$$