SOLUCIONES

1. Estudia si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifica tu repuesta. (Recuerda que si la afirmación es verdadera hay que dar una demostración mientras que si la afirmación es falsa es suficiente con dar un contraejemplo):

a) En el espacio afín $\mathbb{A}^4(\mathbb{R})$ dos planos siempre se cortan.

b) La composición de dos homotecias de $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ es siempre una homotecia.

c) Sea $f : \mathbb{A}^3(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ una afinidad de la que se sabe que tiene una recta de puntos fijos. Entonces su aplicación lineal asociada $\overrightarrow{f}$ tiene un autovalor con valor 1.

d) La forma cuadrática $Q : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ con $Q(x, y) = xy$ tiene rango dos.

---

a) Falso. Contraejemplo: Consideramos los planos dados por las ecuaciones implicitas

$$\pi_1 : \{x = 0\,,\, y = 0\} \qquad \text{y}\pi_2 : \{z = 0\,,\, t = 0\},$$

que no se cortan.
b) Falso. Si componemos una homotecia con su inversa, que también es una homotecia, obtenemos la identidad que no es una homotecia.
c) Verdadero. Sean p, q dos puntos fijos distintos. Entonces,

$$\overrightarrow{pq} = \overrightarrow{f(p)f(q)} = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{pq}).$$

Luego, $\overrightarrow{0} \neq \overrightarrow{pq}$ es un autovector de $\overrightarrow{f}$ con autovalor 1.
d) Verdadero. Haciendo el cambio de coordenadas $x = x_1 + y_1$, $y = x_1 - y_1$, obtenermos la forma normal de la forma cuadrática que estamos considerando. Es decir,, $Q(x, y) = xy = x_1^2 - y_1^2$, luego el rango de Q es 2.

---

2. Sea la recta L_a : $\{x + y = a,\, z = 2 - a\}$, $a \in \mathbb{R}$.

a) Determina los planos que contienen a L_a.

b) Para $a = 0$, calcula los planos que contienen a la recta L_0 y estén a distancia 1 del punto $P = (1, 0, 0)$.

---

a) Los planos que contienen a L_a son de la forma $0 = \lambda(x + y - a) + \mu(z - (2 - a))$, para $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

b) Para $a = 0$, los planos que contienen a L_0 son de la forma $0 = \lambda(x + y) + \mu(z - 2) = x + y + \mu'(z - 2)$, si $\lambda \neq 0$. Si imponemos que estén a distancia 1 de P, obtenemos:

$$1 = \frac{|1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + \mu' \cdot 0 - 2\mu'|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + (\mu')^2}} \iff (1 - 2\mu')^2 = 2 + (\mu')^2 \iff 3(\mu')^2 - 4\mu' - 1 = 0 \iff \mu' = \frac{2 \pm \sqrt{7}}{3}.$$

Por otra parte, si $\lambda = 0$ obtenemos el plano $z - 2 = 0$, cuya distancia al punto $(1, 0, 0)$ es:

$$\frac{|0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 0 - 2|}{\sqrt{1^2}} = 2 \neq 1.$$

Luego estos son los dos planos que contienen a L_0 y están a distancia 1 de P.
Por lo tanto los planos que están a distancia 1 del punto $(1, 0, 0)$ son: $x + y + \frac{2\pm\sqrt{7}}{3}(z - 2) = 0$.

3. Sea $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y consideramos la matriz

$$M = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ \beta & 2 \end{pmatrix}.$$

a) Determina los valores de α y β para que la matriz M defina un producto escalar respecto a la base canónica de $\mathbb{R}^2$.

b) Para $\alpha = 1$ calcula el complemento ortogonal de la recta $\{x = 2y\}$.

c) Para $\alpha = 1$ calcula las ecuaciones de la proyección ortogonal sobre la recta $\{x = 2y\}$.

---

a) Para que M defina un producto escalar tiene que ser una matriz simétrica, luego $\beta = 1$. Por el Criterio de Sylvester, obtenemos que $\alpha \rangle 0$ y $2\alpha - 1 \rangle 0$, luego $\alpha > \frac{1}{2}$.

b) Sea $L : \{x = 2y\} \equiv \lambda \overrightarrow{v}$, siendo $\overrightarrow{v} = (2, 1)$. Entonces,

$$L^{\perp} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \, : \, 0 = (x \, y) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 3x + 4y \right\}.$$

Luego,

$$L^{\perp} = \mathcal{L} \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

c) Los vectores $u_1 = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{10}} \\ \frac{1}{\sqrt{10}} \end{pmatrix}$ y $u_2 = \begin{pmatrix} \frac{-4}{\sqrt{10}} \\ \frac{3}{\sqrt{10}} \end{pmatrix}$ forman una base ortonormal de $\mathbb{R}^2$ con respecto al producto escalar que define la matriz M tal que $L = \mathcal{L}(u_1)$ $L^{\perp} = \mathcal{L}(u_2)$. Así, la proyección ortogonal sobre la recta L tiene por matriz en la base u_1, u_2:

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

como la matriz de cambio es

$$C = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{10}} & \frac{-4}{\sqrt{10}} \\ \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{3}{\sqrt{10}} \end{pmatrix}$$

entonces la matriz pedida es

$$A = CA'C^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{6}{10} & \frac{8}{10} \\ \frac{3}{10} & \frac{4}{10} \end{pmatrix}.$$

---

4. En $\mathbb{A}^4(\mathbb{R})$ demuestra que una variedad lineal L de dimensión 3 y un plano π no contenido en L nunca se cruzan.

Consideremos el plano $\pi : a_1 + \mathcal{L}(\{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\}) = a_1 + \overrightarrow{F}$ y la variedad lineal tres dimensional $L : a_2 + \mathcal{L}(\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}\}) = a_2 + \overrightarrow{W}$. Como cinco vectores son siempre linealmente dependientes en un espacio vectorial de dimensión 4, $\overrightarrow{F} \cap \overrightarrow{W}$ es distinta del vacío pero si es un subespacio vectorial de dimensión 2, entonces $\overrightarrow{F} \subset \overrightarrow{W}$, por lo que π y L son paralelas (luego no se cruzan) . En otro caso la dimensión de $\overrightarrow{F} \cap \overrightarrow{W}$ es uno. Por la fórmula de Grassmann, entonces la dimensión de $\overrightarrow{\pi} + \overrightarrow{L}$ es igual a 4, luego es todo $\mathbb{R}^4$ y, por tanto, $\overrightarrow{a_1 a_2}$ siempre va a pertenecer a $\overrightarrow{\pi} + \overrightarrow{L}$, luego estas variedades lineales se cortan.

5. a) Consideremos la familia de afinidades de $A^2(\mathbb{R})$ dadas por las ecuaciones (con respecto a sistema de referencia canónico):

$$f(x,y) = (dx+cy+a, x+b)$$

Determina los valores de los parámetros para los que estas afinidades son movimientos y calcula sus elementos geométricos.

b) Calcula las ecuaciones de la simetría deslizante de eje paralelo a la recta $\{x=y\}$ que transforma el punto $(1,0)$ en el $(1,1)$.

<u>SOLUCIÓN</u>: a) Una condición necesaria y suficiente para que f sea un movimiento, es que su aplicación lineal asociada $\overrightarrow{f}(x,y) = (dx+cy, x)$ sea ortogonal. Sea A la matriz de $\overrightarrow{f}$ con respecto de la base canónica, se tiene que

$$AA^t = \begin{pmatrix} d & c \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & 1 \\ c & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d^2+c^2 & d \\ d & 1 \end{pmatrix},$$

y por lo tanto f es un movimiento si y sólo si $d=0$ y $c^2=1$. Supongamos primero que $d=0$ y $c=1$, entonces $A=A^t$ y sus autovalores son 1 y -1, por lo que $\overrightarrow{f}$ es una simetría axial, cuyo eje es $V_1 = L[(1,1)]$. Buscamos los puntos fijos de f, resolviendo el sistema

$$\begin{cases} a+y=x \\ b+x=y \end{cases} \implies b+a+y=y \implies b=-a.$$

Por lo tanto, si $b=-a$ la aplicación f es una simetría afin, cuyo eje de simetría es la recta $y=-a+x$. Si por el contrario, $b\neq -a$, no hay puntos fijos, así que la aplicación f es una simetría con deslizamiento. Buscamos ahora la variedad característica de f, para lo cual tomamos $p=(x,y)$ e imponemos que $\overrightarrow{pf(p)} \in V_1$:

$$\overrightarrow{pf(p)} = (a+y-x, b+x-y) \in V_1 \iff y = \frac{b-a}{2}+x$$

Para calcular el vector de deslizamiento tomamos un punto de la variedad característica, por ejemplo $q=\left(0,\frac{b-a}{2}\right)$ y calculamos

$$\overrightarrow{v} = \overrightarrow{qf(q)} = \overrightarrow{\left(0,\frac{b-a}{2}\right)\left(\frac{a+b}{2},b\right)} = \left(\frac{a+b}{2},\frac{a+b}{2}\right).$$

Supongamos finalmente que $d=0$ y $c=-1$, entonces la aplicación $\overrightarrow{f}$ no es autoadjunta. Su matriz con respecto de la base canónica es

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\pi/2) & -\operatorname{sen}(\pi/2) \\ \operatorname{sen}(\pi/2) & \cos(\pi/2) \end{pmatrix},$$

y por lo tanto $\overrightarrow{f}$ es un giro de ángulo $\pi/2$. Resolviendo el sistema de puntos fijos de f obtenemos que $C=\left(\frac{a-b}{2},\frac{a+b}{2}\right)$ es el único punto fijo, luego f es un giro de centro C y ángulo $\pi/2$.

b) La aplicación lineal asociada $\overrightarrow{f}$ es una simetría axial, cuyo eje es $V_1 = L[(1,1)]$. Consideremos la base ortonormal $\mathcal{B} = \left\{\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right),\left(\frac{-1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right\}$, se tiene que

$$M_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{f}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad P = M_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}_c} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad M_{\mathcal{B}_c\to\mathcal{B}} = P^t = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix},$$

luego efectuando el cambio de base, $\overrightarrow{f}(x,y) = (y,x)$. Por definición de aplicación vectorial asociada se tiene que $f(x,y) = f(1,0) + \overrightarrow{f}(x-1,y)$, y consecuentemente $f(x,y) = (1,1)+(y,x-1) = (1+y,x)$.

---

6. En el sistema de referencia ortonormal usual de $\mathbb{R}^2$, considera la cónica de ecuación

$$2xy + 2x + 2y + 1 = 0.$$

a) Determina el tipo de cónica y decide si es degenerada o no.

b) Encuentra un sistema de referencia ortonormal respecto al que la ecuación de la cónica sea canónica.

c) Describe, en las coordenadas originales, los elementos geométricos de la cónica:

- **Parábola: Foco, vértice, eje principal y directriz.**
- **Elipse: Focos, centro y ejes principales.**
- **Hipérbola: Focos, centro, ejes principales y asíntotas.**

<u>SOLUCIÓN</u>: a) Las matrices asociadas a la cónica son

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \overline{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

y por lo tanto tenemos los invariantes

$$\delta = \det(A) = -1, \qquad \Delta = \det(\overline{A}) = 1, \qquad C = -\frac{\Delta}{\delta} = 1.$$

Sabemos entonces que existe un sistema de referencia ortonormal con respecto del cual la cónica tiene por ecuación $x_2^2 - y_2^2 = 1$, y estamos ante una hipérbola no degenerada.

b) Para encontrar dicho sistema ortonormal, hallamos el polinomio característico $P(\lambda) = \det(A - \lambda Id) = (\lambda - 1)(\lambda + 1)$, y consideramos la base ortonormal de autovectores $\mathcal{B} = \left\{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right\}$. El cambio de base entre las coordenadas (x, y) (con respecto de la base canónica) y (x_1, y_1) (con respecto de $\mathcal{B}$) viene dado por

$$\left\{\begin{array}{l} x = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 - y_1) \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 + y_1) \end{array}\right., \qquad \left\{\begin{array}{l} x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(x + y) \\ y_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(x - y) \end{array}\right..$$

Sustituimos el cambio de base en la ecuación de la cónica y completamos cuadrados para eliminar los términos de grado 1:

$$\begin{aligned} 2xy + 2x + 2y + 1 &= (x_1^2 - y_1^2) + \sqrt{2}(x_1 - y_1) + \sqrt{2}(x_1 + y_1) + 1 \\ &= x_1^2 - y_1^2 + 2\sqrt{2}x_1 + 1 \\ &= (x_1 + \sqrt{2})^2 - y_1^2 - 1. \end{aligned}$$

Finalmente, introduciendo las coordenadas (x_2, y_2) dadas por

$$\left\{\begin{array}{l} x_2 = x_1 + \sqrt{2} = \sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}(x + y) \\ y_2 = y_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(x - y) \end{array}\right., \qquad \left\{\begin{array}{l} x = -1 + \frac{1}{\sqrt{2}}(x_2 - y_2) \\ y = -1 + \frac{1}{\sqrt{2}}(x_2 + y_2) \end{array}\right.,$$

se tiene que $x_2^2 - y_2^2 = 1$ es la ecuación de la cónica, con respecto del sistema de referencia ortonormal $\mathcal{R}' = \left\{(-1, -1); \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right\}$.

c) Para hallar los elementos geométricos de la cónica empezaremos estudiando su forma canónica. La hipérbola de ecuación $x_2^2 - y_2^2 = 1$ tiene su eje principal en la recta $y_2 = 0$, de longitud $a = 1$, y su eje secundario en la recta $x_2 = 0$, de longitud $b = 1$. Sus asíntotas son las rectas $y_2 = x_2$, y $y_2 = -x_2$.

Teniendo en cuenta que la distancia focal viene dada por $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{2}$, sabemos que los focos de la hipérbola son los puntos $F_1' = (\sqrt{2}, 0)$ y $F_2' = (-\sqrt{2}, 0)$. A continuación aplicamos el cambio de referencia para hallar las coordenadas (x, y) de sus elementos geométricos. Las rectas $y_2 = 0$ y $x_2 = 0$ se convierten, respectivamente, en las rectas $x = y$, y $x + y = -2$, que son los ejes de la hipérbola. El centro de la hipérbola es el punto de corte de los ejes, es decir $(-1, -1)$. De manera similar, $y_2 = x_2$, y $y_2 = -x_2$ se convierten, respectivamente, en $y = -1$ y $x = -1$, que son las asíntotas de la hipérbola. Los focos de la hipérbola son los puntos $F_1 = (0, 0)$ y $F_2 = (-2, -2)$.

---

7. Sea $Q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la forma quadrática dada por:

$$Q(x, y, z) = x^2 + 3y^2 - 2xy + 4xz - 8yz.$$

a) Obtener una forma canónica para Q.

b) Determina el tipo de las cuádricas que aparecen en la familia uniparamétrica

$$Q(x, y, z) = \alpha,$$

en función del parámetro $\alpha \in \mathbb{R}$.

<u>SOLUCIÓN</u>: a) La matriz asociada a nuestra forma cuadrática es

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & -4 \\ 2 & -4 & 0 \end{pmatrix},$$

y los menores principales de Sylvester vienen dados por

$$A_1 = 1, \qquad A_2 = \det \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = 2, \qquad A_3 = \det(A) = -12.$$

Por lo tanto, los índices de inercia de Q son $(N_+, N_-, N_0) = (2, 1, 0)$. Podemos aplicar el algoritmo de Gauss de diagonalización de matrices simétricas para demostrar que A es semejante a la matriz diagonal de cocientes de Sylvester

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}.$$

En cualquier caso, completando cuadrados se tiene que

$$\begin{aligned} x^2 + 3y^2 - 2xy + 4xz - 8yz &= (x - y + 2z)^2 + 2y^2 - 4yz - 4z^2 \\ &= (x - y + 2z)^2 + 2\big((y - z)^2 - z^2\big) - 4z^2 \\ &= (x - y + 2z)^2 + 2(y - z)^2 - 6z^2. \end{aligned}$$

b) Calculamos los invariantes de la cuádrica:

$$\delta = \det(A) = -12, \qquad \Delta = \det \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & -4 & 0 \\ 2 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\alpha \end{pmatrix} = 12\alpha, \qquad C = -\frac{\Delta}{\delta} = \alpha.$$

Supongamos primero que $\alpha > 0$, entonces tenemos un hiperboloide de una hoja dado por

$$(x - y + 2z)^2 + 2(y - z)^2 - 6z^2 = |\alpha|.$$

Si $\alpha < 0$, entonces el hiperboloide es de dos hojas, y viene dado por

$$6z^2 - 2(y - z)^2 - (x - y + 2z)^2 = |\alpha|$$

Finalmente, en el caso degenerado, si $\alpha = 0$, podemos despejar

$$z^2 = \frac{1}{6}(x - y + 2z)^2 + \frac{1}{3}(y - z)^2,$$

y por lo tanto tenemos un cono elíptico.